

WPROWADZENIE
— DO —
LOGIKI

ALFRED
TARSKI

PHILOMATH

<http://tarski.calculemus.org>

Alfred Tarski

Wprowadzenie
do logiki

Alfred Tarski

Wprowadzenie do logiki
i do metodologii
nauk dedukcyjnych

Przekład z czwartej edycji angielskiej
wydanej pod redakcją Jana Tarskiego

Przełożyła Monika Sujczyńska

Nakładem
FUNDACJI NA RZECZ INFORMATYKI
LOGIKI I MATEMATYKI

Warszawa, 2012

Wydanie trzecie (elektroniczne, PDF),
treść zgodna z wydaniem pierwszym

Tytuł oryginału
Introduction to Logic
and to the Methodology of Deductive Sciences
Oxford University Press 1994

Fundacja na rzecz Informatyki, Logiki i Matematyki w Warszawie,
jako posiadacz praw wydawniczych do polskiego tłumaczenia,
nieodpłatnie udostępnia zainteresowanym elektroniczną kopię
oryginału pierwszego wydania (ISBN 83-901414-2-60) umieściwszy
ją w witrynie Fundacji pod adresem <http://tarski.calculumu.org>.
Dopuszcza się kopiowanie na użytek indywidualny i na serwerach
udostępniających książkę w Sieci pod warunkiem zamieszczenia
informacji: „Dzieło skopiowane za zgodą Wydawcy na podstawie
elektronicznego oryginału zamieszczonego pod adresem:
<http://tarski.calculumus.org>”.

Dopuszczalne jest również przekazywanie kopii na zewnętrznych
nośnikach pamięci. Rozpowszechniany może być wyłącznie plik PDF
w postaci oryginalnej, bez dokonywania w nim jakichkolwiek zmian.
Przekazanie przez użytkownika kopii elektronicznej lub jej wydruku
innemu użytkownikowi jest dopuszczalne tylko nieodpłatnie.

Spis treści

Z przedmów Autora do poprzednich wydań	ix
Od redaktora wydania amerykańskiego	xvii
Krótki szkic biograficzny Alfreda Tarskiego	xxi

Część pierwsza. Elementy logiki. Metoda dedukcyjna

I O użyciu zmiennych

§1	Stałe i zmienne	3
§2	Wyrażenia zawierające zmienne – funkcja zdaniowa i funkcja nazwowa	4
§3	Konstrukcja zdań, w których występują zmienne – zdania ogólne i egzystencjalne	7
§4	Kwantyfikatory ogólne i egzystencjalne; zmienne wolne i związane	9
§5	Znaczenie zmiennych w matematyce	13
	Ćwiczenia	14

II O rachunku zdań

§6	Stałe logiczne; logika dawna i obecna	19
§7	Rachunek zdań; negacja zdania, koniunkcja i alternatywa zdań	20
§8	Implikacje lub zdania warunkowe; implikacje w znaczeniu materialnym	24
§9	Użycie implikacji w matematyce	29
§10	Równoważność zdań	32
§11	Zasady formułowania definicji	33
§12	Prawa rachunku zdaniowego	36
§13	Symbolika rachunku zdań; funkcje zdaniowe złożone oraz tabelki prawdziwościowe	38
§14	Stosowanie praw rachunku zdań w dowodach matematycznych	44
§15	Reguły dowodzenia; dowody zupełne	46
	Ćwiczenia	49

III O teorii identyczności

§16	Pojęcia logiczne spoza rachunku zdań; pojęcie identyczności	55
§17	Podstawowe prawa teorii identyczności	56
§18	Identyczność przedmiotów i identyczność ich oznaczeń; użycie cudzysłowu	60
§19	Równość w arytmetyce i w geometrii oraz jej związek z identycznością logiczną	63
§20	Kwantyfikatory ilościowe	65
	Ćwiczenia	67

IV O teorii klas

§21	Klasy i ich elementy	71
§22	Klasy i funkcje zdaniowe o jednej zmiennej wolnej	73
§23	Klasa pełna i klasa pusta	76
§24	Podstawowe relacje między klasami	77
§25	Działania na klasach	80
§26	Klasy równoliczne, liczba kardynalna klasy, klasy skoń- czone i nieskończone; arytmetyka jako część logiki . . .	83
	Ćwiczenia	85

V O teorii relacji

§27	Relacje, ich dziedziny i przeciwdziedziny; relacje i funkcje zdaniowe z dwiema zmiennymi wolnymi	91
§28	Algebra relacji	94
§29	Kilka rodzajów relacji	97
§30	Relacje zwrotne, symetryczne oraz przechodnie	99
§31	Relacje porządkujące; przykłady innych relacji	101
§32	Relacje jednoznaczne czyli funkcje	103
§33	Relacje wzajemnie jednoznaczne lub funkcje odwracalne oraz odpowiedniość doskonała	108
§34	Relacje wielocłonowe; funkcje kilku zmiennych i działania	111
§35	Znaczenie logiki dla innych nauk	113
	Ćwiczenia	114

VI O metodzie dedukcyjnej

§36	Podstawowe składowe nauki dedukcyjnej – terminy pier- wotne i zdefiniowane, aksjomaty i twierdzenia	123
§37	Modele i interpretacje nauki dedukcyjnej	126
§38	Prawo dedukcji; formalny charakter nauk dedukcyjnych .	131

§39	Wybór aksjomatów i terminów pierwotnych; ich niezależność	136
§40	Formalizacja definicji i dowodów, sformalizowane nauki dedukcyjne	138
§41	Niesprzeczność i zupełność nauki dedukcyjnej; zagadnie- nie rozstrzygalności	141
§42	Rozszerzone pojęcie metodologii nauk dedukcyjnych . . .	145
	Ćwiczenia	147

Część druga. Zastosowania logiki i metodologii w konstruowaniu teorii matematycznych

VII Konstrukcja teorii matematycznej: prawa uporządkowania liczb

§43	Terminy pierwotne konstruowanej teorii; aksjomaty, które dotyczą podstawowych relacji między liczbami	165
§44	Prawa przeciwzwrotności dla podstawowych relacji; do- wody nie wprost	167
§45	Dalsze twierdzenia o podstawowych relacjach między liczbami	170
§46	Inne relacje między liczbami	173
	Ćwiczenia	177

VIII Konstrukcja teorii matematycznej: prawa dodawania i odejmowania

§47	Aksjomaty dotyczące dodawania; ogólne własności dział- lań, pojęcie grupy i grupy abelowej	181
§48	Prawa przemienności i łączności dla większej liczby skład- ników	183
§49	Prawa monotoniczności dla dodawania i ich odwrócenia . .	184
§50	Zamknięte systemy zdań	190
§51	Kilka wniosków z praw monotoniczności	192
§52	Definicja odejmowania; działania odwrotne	195
§53	Definicje, których definiendum zawiera znak identyczności	196
§54	Twierdzenia o odejmowaniu	198
	Ćwiczenia	199

IX Rozważania metodologiczne dotyczące skonstruowanej teorii

§55	Eliminacja zbytecznych aksjomatów z pierwotnego systemu aksjomatycznego	207
§56	Niezależność aksjomatów systemu uproszczonego	210
§57	Eliminacja zbytecznego terminu pierwotnego prowadząca do uproszczenia systemu aksjomatycznego; pojęcie grupy abelowej uporządkowanej	213
§58	Dalsze uproszczenie systemu aksjomatycznego; możliwe przekształcenia systemu terminów pierwotnych	216
§59	Zagadnienie niesprzeczności skonstruowanej teorii	222
§60	Zagadnienie zupełności skonstruowanej teorii	223
	Ćwiczenia	225

X Rozszerzenie skonstruowanej teorii: podstawy arytmetyki liczb rzeczywistych

§61	Pierwszy system aksjomatyczny dla arytmetyki liczb rzeczywistych	231
§62	Bliższa charakterystyka pierwszego systemu aksjomatycznego; jego metodologiczne zalety i dydaktyczne braki	233
§63	Drugi system aksjomatyczny dla arytmetyki liczb rzeczywistych	235
§64	Bliższa charakterystyka drugiego systemu aksjomatycznego; pojęcie ciała liczb i ciała uporządkowanego liczb	236
§65	Równoważność obu systemów aksjomatycznych; metodologiczne braki i dydaktyczne zalety drugiego systemu	238
	Ćwiczenia	239
	Posłowie	245
	Skorowidz	251

Z przedmów Autora do poprzednich wydań

Z oryginalnego wydania (1936)

Profani wypowiadają niejednokrotnie pogląd, że matematyka jest już dzisiaj nauką martwą: osiągnąwszy niezmiernie wysoki stopień rozwoju, zastygła jakby w swej kamiennej doskonałości. Trudno o błędniejszy obraz sytuacji: mało która dziedzina wiedzy przeżywa w chwili obecnej okres tak intensywnego rozwoju jak właśnie matematyka. Rozwój to przytem nad wyraz wszechstronny: matematyka rozszerza zakres swego władania we wszelkich kierunkach – rozwija się wzwyż, wszcz i w głąb. Rozwija się wzwyż – bo na gruncie starych jej teoryj, liczących setki lub nawet tysiące lat istnienia, wyrastają wciąż świeże problematy, pojawiają się coraz mocniejsze i doskonalsze wyniki. Rozwija się wszcz – bo metody jej przenikają do innych gałęzi wiedzy, krąg jej badań obejmuje coraz rozleglejsze dziedziny zjawisk, wciąż nowe teorie wchodzą do wielkiej rodziny nauk matematycznych. Rozwija się wreszcie w głąb – bo wzmacniają się jej podstawy, utrwala się zasady i doskonała metody, stosowane przy jej budowie.

W książce niniejszej pragnąłem dać czytelnikowi, interesującemu się matematyką współczesną, ale stojącemu od niej zdala, najogólniejsze choćby pojęcie o tym trzecim kierunku rozwojowym – o rozwoju w głąb. Chciałem zaznajomić czytelnika z najważniejszymi pojęciami odrębnej nauki, zwanej *logiką matematyczną*, a stworzonej w celu pogłębienia i utrwalenia podstaw matematyki, – nauki, która mimo krótkotrwałego, bo niespełna stuletniego okresu istnienia zdołała już osiągnąć wysoki poziom doskonałości i której rola w całokształcie wiedzy znacznie przerosła wytknięte pierwotnie granice.[†] Zamierza-

[†]W niniejszej książce logika jest traktowana przede wszystkim jako nauka, która utrwała podstawy matematyki. Ponieważ naturalnie nasuwa się pytanie, czy może ona odgrywać szerszą rolę, z pewnością Autor tę kwestię badał. Por. także pierwszy akapit przedmowy z 1941 roku. – Uwagi Autora staną się bardziej zrozumiałe, jeśli czytelnik weźmie pod uwagę pewien wybitny ruch filozoficzny, z którym Autor pozostawał w bliskim kontakcie. Zauważmy, że pierwsze wydanie *Wprowadzenia do logiki* ukazało się w 1936 roku, czyli dziesięć lat po utworzeniu

łem wykazać, że owe pojęcia logiczne przenikają całą matematykę, że obejmują w sobie jako szczególne przypadki wszelkie pojęcia specyficznie matematyczne, że w rozumowaniach matematycznych stosuje się nieustannie – świadomie lub nieświadomie – prawa logiki. Chciałem wreszcie wyłożyć podstawowe zasady budowania teorii matematycznych, zasady, których dokładnem opracowaniem zajmuje się inna znowu nauka – *metodologia matematyki*, i pragnąłem pokazać, jak wygląda stosowanie owych zasad w praktyce.

Niełatwą było rzeczą zrealizować cały ten plan w ramach niewielkiej książeczki, nie zakładając przytem u czytelnika ani specjalnego wykształcenia matematycznego, ani też większego wyrobienia w rozważaniach o charakterze wybitnie abstrakcyjnym. Trzeba było godzić na każdym kroku możliwie daleko posuniętą przystępność z niezbędną zwięzłością, starając się przytem usilnie o unikanie błędów i poważniejszych nieścisłości z naukowego punktu widzenia. Trzeba było posługiwać się językiem, możliwie mało odbiegającym od języka potocznego, i zaniechać stosowania specjalnej symboliki logicznej – cennego instrumentu, który pozwala łączyć w wykładzie zwięzłość z precyzją, usuwa w znacznej mierze możliwość dwuznaczności i nieporozumienia i przez to oddaje istotne usługi we wszelkich subtelniejszych rozumowaniach. Trzeba było z góry zrezygnować z systematycznego wykładu, z pośród mnóstwa nasuwających się tematów nieliczne tylko dokładniej omówić, o inne mimochodem potrącić, inne jeszcze zupełnie przemilczeć, zdając sobie dobrze sprawę, że wybór nosić musi w silniejszym lub słabszym stopniu cechę subiektywnej dowolności. W tych sytuacjach, gdy nauka współczesna nie zdobyła się dotąd na jednolite stanowisko i przewiduje dla jednego i tego samego problemu szereg możliwych, równie poprawnych rozwiązań, niepodobna było myśleć o obiektywnem przedstawieniu wszelkich znanych poglądów,

przez kilku filozofów i filozoficznie ukierunkowanych uczonych Koła Wiedeńskiego. Jego członkowie dużo pisali o różnych doniosłych problemach filozoficznych, jak sprawy języka, nauki etc., a dążąc do maksymalnej jasności i precyzji, często posługiwali się w dyskusjach pojęciami z zakresu logiki (i metodologii matematyki). Do członków tego klubu zaliczał się m.in. Rudolf Carnap (por. ods. 8 na str. 147). Dodajmy, że zainteresowania i założenia członków Koła Wiedeńskiego zostały przyswojone (w większym lub mniejszym stopniu) przez filozofów w innych miejscach, a w szczególności przez filozofów związanych z polską szkołą; patrz *Krótki szkic biograficzny Alfreda Tarskiego*.

trzeba było natomiast decydować się na jakiś jeden określony punkt widzenia; przy podejmowaniu decyzji dbałem raczej o to, by obrana metoda rozwiązywania problemu była możliwie prosta i nadawała się do popularnego wykładu, niż o to, by odpowiadała ona moim osobistym tendencjom. – Nie łudzę się bynajmniej, że wszędzie udało mi się zwycięsko wybrnąć z tych i wielu jeszcze innych trudności.

Przedmowa do I wydania amerykańskiego (1941)

Niniejsza książka jest częściowo zmienionym, rozszerzonym wydaniem pracy *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, która ukazała się w 1936 roku po polsku, a w 1937 roku w dosłownym tłumaczeniu na język niemiecki (pod tytułem *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*). Zgodnie z pierwotnym zamierzeniem była to książka popularno-naukowa, jej celem zaś przedstawienie wykształconemu laikowi – w sposób łączący naukową dokładność z możliwie największą przystępnością – jasnego poglądu na silny prąd myśli współczesnej, który skupia się wokół nowoczesnej logiki. Prąd ten powstał początkowo z nieco ograniczonego zadania utrwalenia podstaw matematyki. Wszelako w obecnej fazie zatacza on znacznie szersze kręgi. Bowiem [dąży do objęcia] całej ludzkiej wiedzy. W szczególności, jednym z jego celów jest udoskonalenie i wyostrenie metody dedukcyjnej, która [nie tylko w matematyce, ale prawie] w każdej dziedzinie intelektualnego wysiłku, służy jako niezbędne narzędzie do wyprowadzania wniosków z przyjętych założeń.

Reakcja na polskie i niemieckie wydania, a zwłaszcza pewne sugestie krytyków podsunęły mi pomysł nowej edycji nie tylko książki popularno-naukowej, lecz również podręcznika akademickiego do podstawowego kursu logiki i metodologii nauk dedukcyjnych. Eksperyment wydawał się o tyle pociągający, że w dziedzinie tej odczuwało się brak odpowiednich podręczników na podstawowym poziomie.

Żeby przeprowadzić ten eksperyment trzeba było dokonać w książce kilku zmian.

W poprzednich wydaniach nie poruszano wcale lub tylko dotknęto pewnych podstawowych pytań i pojęć czy to z powodu ich bardziej technicznego charakteru, czy dla uniknięcia punktów spornych. Jako przykłady takich tematów można podać: różnicę między użyciem pewnych terminów w logice a użyciem ich w języku codziennym; ogólną metodę sprawdzania praw rachunku zdaniowego; konieczność wyraźnego rozróżnienia między słowami a ich nazwami; pojęcie klasy uniwersalnej i pojęcie klasy zerowej; podstawowe pojęcia rachunku relacji i wreszcie koncepcję metodologii jako ogólnej nauki o naukach. Wszystkie te tematy omawiam w niniejszym wydaniu (aczkolwiek nie

wszystkie w sposób równie dokładny), ponieważ wydawało mi się, że bez nich każdy podręcznik nowoczesnej logiki byłby niepełny. [...]

Inaczej niż w poprzednich wydaniach, w tej książce uznałem za niezbędne zapoznanie czytelnika z elementami symboliki logicznej. W praktyce jednak użycie tej symboliki jest bardzo wąskie i ogranicza się głównie do ćwiczeń.

W poprzednich wydaniach przykłady do ilustracji rozważań ogólnych i abstrakcyjnych czerpałem głównie z matematyki licealnej, uważałem bowiem i nadal uważam, że matematyka elementarna, a szczególnie algebra bardzo się nada do tego celu ze względu na proste pojęcia i jednolite metody dowodzenia. W niniejszym wydaniu jednakże, zwłaszcza w dodanych fragmentach, częściej sięgałem do przykładów z innych dziedzin, przeważnie z życia codziennego. [...]

Zasadnicze rysy książki pozostały niezmienione. Przedmowa do pierwszego wydania, której główna część [poprzedza niniejszą przedmowę], da czytelnikowi pojęcie o ogólnym charakterze książki. Tym niemniej chyba warto w tym miejscu powiedzieć wprost, czego czytelnik czy czytelniczka nie powinni od niej oczekiwać.

Po pierwsze, książka nie zawiera systematycznego i ściśle dedukcyjnego przedstawienia logiki; nie wchodziłoby ono, rzecz jasna, w zakres podstawowego podręcznika. Początkowo do niniejszego wydania zamierzałem włączyć dodatkowy rozdział zatytułowany *Logika jako nauka dedukcyjna*, który – jako ilustracja ogólnej dyskusji metodologicznej w rozdziale VI – pokazałby w ogólnym zarysie ciągły rozwój pewnych podstawowych działów logiki. Zamiaru tego z wielu powodów nie byłem w stanie urzeczywistnić, ale włączyłem do rozdziału VI kilka odpowiednich ćwiczeń, co do pewnego stopnia kompensuje ten brak.

Po drugie, poza dwoma dość krótkimi fragmentami [i kilkoma odnośnymi ćwiczeniami w rozdziale VI], książka nie dostarcza informacji o tradycyjnej logice arystotelesowskiej i nie zawiera materiału z niej wyprowadzonego. Uważam jednak, że ilość miejsca poświęconego tu tradycyjnej logice odpowiada właśnie niewielkiej roli, do jakiej zredukowano miejsce tej logiki w nowoczesnej nauce; wierzę, że moją opinię podzieli większość współczesnych logików.

I wreszcie, książka nie zajmuje się zagadnieniami z zakresu tzw. logiki i metodologii nauk doświadczalnych. Muszę przyznać, że wątpię,

czy w ogóle istnieje jakaś specjalna „logika nauk doświadczalnych”, przeciwstawiona logice jako takiej lub „logice nauk dedukcyjnych” (o ile słowa „*logika*” używa się w takim kontekście, jak w tej książce – czyli jako nazwy nauki, która analizuje znaczenie pojęć wspólnych dla wszystkich nauk oraz ustala ogólne prawa rządzące tymi pojęciami). Jest to jednak kwestia bardziej terminologiczna niż rzeczowa. Tak czy owak, metodologia nauk doświadczalnych stanowi ważną dziedzinę badań naukowych i, podobnie jak w przypadku wszystkich innych nauk, znajomość logiki jest oczywiście cenna w jej poznawaniu. Inna sprawa, że do dziś pojęcia i metody logiki nie znalazły ani wąskich, ani szerokich zastosowań w tej dziedzinie. Być może, ten stan rzeczy jest nie tylko odzwierciedleniem obecnego etapu badań metodologicznych, lecz wynika z innych okoliczności. Niewykluczone, że odpowiednie podejście metodologiczne wymaga traktowania nauki doświadczalnej nie tylko jako teorii naukowej – czyli układu twierdzeń uznanych uporządkowanych zgodnie z pewnymi zasadami – ale jako całości, złożonej częściowo z twierdzeń uznanych, częściowo zaś z działań ludzkich. Dodajmy, że w przeciwieństwie do wysokiego rozwoju nauk doświadczalnych jako takich, metodologia tych nauk nie może się pochwalić porównalnymi osiągnięciami – mimo podejmowanych w tym kierunku wielkich wysiłków. [...] Z tych i innych powodów widzę małe racjonalne uzasadnienie łączenia w ramach tego samego kursu akademickiego rozważań z zakresu logiki z rozważaniami na temat metodologii nauk doświadczalnych.

Kilka uwag odnośnie układu książki i użycia jej jako podręcznika.

Książkę podzieliłem na dwie części. Pierwsza jest ogólnym wprowadzeniem do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych; druga pokazuje na konkretnych przykładach zastosowania logiki i metodologii przy tworzeniu teorii matematycznych, stwarzając w ten sposób możliwość przyswojenia i pogłębienia wiedzy uzyskanej w pierwszej części. Po każdym rozdziale następują odpowiednie ćwiczenia. Odwołania zawierają krótkie odniesienia historyczne.

Fragmenty, a nawet całe paragrafy, zaznaczone na początku i na końcu gwiazdką „*” zawierają trudniejszy materiał lub zakładają znajomość innych fragmentów zawierających taki materiał; ominięcie ich nie grozi niezrozumieniem kolejnych partii książki. Analogiczna uwaga dotyczy ćwiczeń, których numer poprzedza gwiazdka.

W moim odczuciu książka ta zawiera dość materiału na kurs roczny. Jego układ umożliwia posługiwanie się nią także w kursach półrocznych. W przypadku użycia książki jako podręcznika do półrocznego kursu logiki na wydziale filozofii, proponuję dokładne przestudiowanie pierwszej części, łącznie z trudniejszymi partiami, a całkowite pominięcie drugiej. Jeśli natomiast książka miałaby być wykorzystana w półrocznym kursie na wydziale matematyki – na przykład w kursie podstaw matematyki – to namawiam do przestudiowania obu części z ominięciem trudniejszych partii.

W obu przypadkach chciałbym podkreślić znaczenie dokładnego i wnikliwego przerobienia ćwiczeń; bowiem nie tylko ułatwiają one przyswojenie wprowadzonych pojęć i reguł, lecz również poruszają wiele zagadnień, których nie miałem możliwości omówić.

Byłbym bardzo szczęśliwy, gdyby ta książka przyczyniła się do rozpowszechnienia wiedzy logicznej. [...] Logika przez doskonalenie i wyostrzanie narzędzi myśli sprawia, że ludzie nabierają większego krytycyzmu – dzięki czemu staje się mniej prawdopodobne, że dadzą się zwieść tym wszystkim pseudo-rozumowaniom, którym są dziś ciągle poddawani w różnych częściach świata.

Wrzesień 1940

Alfred Tarski

Redaktor pragnie wymienić osoby, którym autor wyraził (w poprzednich amerykańskich wydaniach) podziękowania: K. J. Arrow, dr O. Helmer, prof. L. Henkin, dr A. Hofstadter, L. K. Krader, prof. Louise H. Lim (Chin), dr J. C. C. McKinsey, prof. E. Nagel, Judith Ng, prof. W. B. Pitt, prof. W. V. Quine, M. G. White, dr P. P. Wiener.

Od redaktora wydania amerykańskiego

Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych Alfreda Tarskiego zostało uznane już za klasykę. Pierwszy raz opublikowano je po polsku ponad pięćdziesiąt lat temu i wówczas była to pierwsza książka popularno-naukowa poświęcona nowoczesnej logice. Wraz z upływem czasu książkę coraz bardziej ceniono. Przetłumaczono ją na jedenaście języków. Dziś jest wciąż aktualna i nadal przyciąga uwagę.

Angielskojęzyczna wersja książki od wielu lat była wyczerpana. Po śmierci Autora w 1983 zaczęto rozmowy na temat nowego wydania. Przewidywano wtedy wprowadzenie do książki zmian dwójakiego rodzaju, uznano bowiem, że istniejący tekst wymaga zarówno niewielkich modyfikacji, jak pewnego rozszerzenia.

Z rozważań o rozszerzeniu tekstu zrodził się pomysł drugiej książki (w przygotowaniu), a to z kolei zadecydowało o postaci niniejszej pozycji.

Przystępując do przygotowania nowego tekstu, oparliśmy się naturalnie na ostatnim wydaniu amerykańskim – trzecim, z roku 1965. (Jego główna treść nieznacznie się różni od treści dwóch pierwszych wydań.) Początkowo zamierzaliśmy ograniczyć się do drobnych korekt redakcyjnych. Wprowadzone modyfikacje okazały się jednak dość liczne i różnorodne. I tak:

(i) W rozdziale V dokonano zmiany konwencji przy przejściu od relacji do funkcji. Funkcję definiujemy teraz jako relację jednoznaczłą. Wychodząc od „ xRy ” otrzymujemy wzór funkcji „ $f(x) = y$ ”. – Konwencja ta pochodzi z pierwotnego tekstu polskiego. W poprzednich amerykańskich wydaniach funkcję definiowano jako relację odwrotnie jednoznaczłą, co prowadziło do wzoru „ $x = f(y)$ ”. Różnica ta, choć błaha, pociągnęła za sobą zmiany w kilku paragrafach tego rozdziału i wymagała zmodyfikowania nie tylko wzorów lecz również treści.

(ii) Niektóre z ćwiczeń w rozdziale VI spełniały rolę wprowadzenia do dedukcyjnego rozwoju logiki. Ćwiczenia te usunęliśmy, ponieważ zamierzamy je wykorzystać w drugiej książce. Na ich miejsce wstawiliśmy nowe ćwiczenia, również ogólnej natury, lecz nieco bardziej elementarne.

(iii) Usunięto paragraf *Proponowana lektura*. Zredagowana wersja tego paragrafu wejdzie do drugiej książki.

(iv) Dołączono *Krótki szkic biograficzny Alfreda Tarskiego*.

(v) Dodano sporo odsyłaczy redakcyjnych. Oznaczono je: „†” i „‡”.

(vi) Zmieniono oznaczenia dostosowując je do obecnie przyjętych. Dotyczy to zwłaszcza oznaczeń kwantyfikatorów i klas. Uwspółcześniono też terminologię. Ponadto uaktualniono kilka uwag historycznych i innych.

(vii) Kilka fragmentów napisano dla podkreślenia kursywą, mimo że w poprzednich wydaniach nie były wyróżnione.

(viii) Zmieniono treść w około 25 zdaniach (z tego część znajduje się w ćwiczeniach i w przedmowie Autora z 1941 roku.)

(ix) Dokonano licznych korekt stylistycznych w całej książce.

(x) Dla zasygnalizowania zmiany tematu wewnątrz paragrafu w obecnej wersji użyto trzech gwiazdek, zamiast wolnych linijek, jak w poprzednich wydaniach.

(xi) Dokonano drobnych modyfikacji w tytułach paragrafów. Modyfikacje te odpowiadają unowocześnionej terminologii i korektom stylistycznym (punkty (vi) i (ix)).

(xii) Wreszcie, przerobiono skorowidz, by uwzględnić wprowadzone zmiany, a ponadto zmodyfikowano go.

Pragniemy skomentować w tym miejscu punkty (viii) i (ix). W każdej publikacji trudno jest wyeliminować do końca chropowatości, ale w przypadku tej książki działały na jej niekorzyść jeszcze dodatkowe czynniki. Tekst angielski prawie w całości był „tłumaczeniem tłumaczenia”. Pracę tę wykonano w pośpiechu, do tego w niesprzyjających okolicznościach. Kolejne wydania natomiast były fotograficznymi odbitkami, w których do głównego tekstu dało się wprowadzić tylko minimalne korekty.

Mówiąc o modyfikacji treści mamy na myśli na przykład § 19, w którym zmieniliśmy krytyczne uwagi Autora odnośnie tradycyjnego użycia w geometrii terminu „*równość*”.

Co się tyczy stylu, to tekst stracił już pewne cechy podwójnego tłumaczenia. Na przykład poprzednio w książce często występowało słowo „*thing*” („*rzecz*”) – w odniesieniu do liczb, klas itp. Wydanie polskie zawierało słowo „*przedmiot*”, które przetłumaczono na język

niemiecki jako „*Ding*”, a następnie na angielski jako „*thing*”. W niniejszej wersji zastąpiono je wszędzie słowem „*object*” („*przedmiot*”).

Przeglądając poprzedni tekst angielski porównaliśmy liczne ustępy z językiem polskim; w kilku przypadkach postaraliśmy się ulepszyć tłumaczenie.

Jeśli chodzi o redakcję głównego tekstu, odsyłaczy i ćwiczeń, to postępowano ściśle według następujących reguł: Poza zmianami wymienionymi w (i) i (ii) nie wprowadzono żadnych modyfikacji z wyjątkiem korekt w poszczególnych zdaniach. Żadnych zdań nie usunięto, nie przestawiono, ani nie dodano poza odsyłaczami redakcyjnymi. Bez zmian pozostawiono również układ każdego akapitu. (Z dwoma wyjątkami: w § 57 zmieniono podział na akapity, by odpowiadał pierwotnej wersji, zaś w § 58 prawo (III) otrzymało numer (V). Od reguł tych odstąpiono nieco w przypadku przedmów, w których dokonano zmian stylistycznych, nie komentując ich, jak w głównym tekście; inne zmiany jednak zaznaczono.) Mielśmy nadzieję, że tak wprowadzone korekty redakcyjne nie zniekształcą ani ogólnego zamysłu Autora, ani przedstawienia jego sposobu myślenia.

Wróćmy do ewentualnego rozszerzenia książki. Autor uczynił już krok w tym kierunku, dołączając do piątego niemieckiego wydania artykuł *Prawda i dowód*. Poza tym w przedmowie z 1941 roku wspominał, że myśli o dodatkowym rozdziale *Logika jako nauka dedukcyjna*.

Jakiś czas po rozmowie w 1983 roku na temat nowego wydania *Wprowadzenia do logiki* Dana Scott i obecny redaktor opracowali jego projekt. Miało ono obejmować odpowiednio poprawiony tekst poprzedniego wydania, kilka artykułów Autora oraz pewien nowy materiał. Już w trakcie realizacji tego projektu stało się jasne, że artykuły i nowy materiał lepiej byłoby zamieścić w niezależnym tomie, wobec czego odstąpiono od pomysłu wydania jednej rozszerzonej książki.

W chwili obecnej wierzymy, że ta druga książka ukaże się w miarę prędko, oraz że zostanie przychylnie przyjęta jako kontynuacja *Wprowadzenia do logiki* i jako kolejny jej tom.

Niestety Dana Scott zaraz na początku musiał znacznie ograniczyć swój udział w przygotowaniu niniejszego wydania książki. Tak więc pracę redakcyjną wziął na siebie obecny jej redaktor.

* * *

Kieruję moje podziękowania przede wszystkim do profesora Dana Scotta, który podjął się rozszerzenia i redakcji pierwotnego tekstu książki. Choć później jego udział w pracy nad książką został znacznie ograniczony (o czym już wspomniałem), jego rady były zawsze bardzo cenne. Zorganizował on też przepisanie książki na komputerze w Carnegie Mellon University. Dziękuję również profesorowi Leonowi Henkinowi za jego ciepłą zachętę do tego przedsięwzięcia oraz profesorowi Stevenowi Givantowi za rozmowy, które wiele mi wyjaśniły. Profesor John Corcoran przeczytał w sposób krytyczny zmodyfikowany już tekst i, mając długoletnie doświadczenie w nauczaniu logiki elementarnej, zaproponował liczne ulepszenia i poprawki; za tę pomoc jestem mu bardzo zobowiązany. Wreszcie, książka została złożona w systemie $\text{\TeX}$, do czego przyczyniło się kilka osób. Osobom tym i wydawnictwu Oxford University Press wyrażam wdzięczność za ich wysiłek w doprowadzeniu do wydania tej książki.

J. T.

Berkeley, Kalifornia, marzec 1993.

Krótki szkic biograficzny Alfreda Tarskiego

Alfred Tarski urodził się 14 stycznia 1901 roku w Warszawie. Jesienią 1918 roku rozpoczął studia w Uniwersytecie Warszawskim, a wiosną 1924 złożył doktorat pod kierunkiem logika S. Leśniewskiego. Z Uniwersytetem Warszawskim pozostał związany do roku 1939.

W Polsce w latach dwudziestych wyróżniały się – ze względu na filozofię i logikę z jednej strony, a matematykę z drugiej – dwa ośrodki naukowe, w Warszawie i we Lwowie (obecnie Lwiv), które nazywano „polską szkołą” (logiki, etc.) Tarski wykorzystał stwarzane przez nie możliwości i dzięki swym nadzwyczajnym talentom i zdolnościom, został wkrótce jednym z ich czołowych przedstawicieli.

Lata 1923–1939 były dla niego bardzo owocne, napisał wówczas wiele swych ważnych prac. Kilka z nich poświęcił rachunkowi zdań, teorii mnogości oraz tematom z zakresu metodologii (takim jak podstawy metamatematyki). Artykuł dotyczący teorii mnogości, jak również właściwej matematyki, ugruntował w nauce dobrze znany paradoks Banacha-Tarskiego.¹ Tarski zaczął też badać inne zagadnienia; wpadł przy tym na wiele pomysłów, które rozwinął w późniejszych latach.

Wśród prac Tarskiego z tego okresu główne miejsce zajmuje monografia o prawdzie, w której zgłębiał zagadnienie filozofii klasycznej (sięgające czasów Arystotelesa). Rozważania te poza tym, że wykorzystywały techniki metodologii, znajdowały się poza głównymi nurtami matematyki. Zaczątek dały im wyczerpujące wykłady i dyskusje nauczycieli Tarskiego: Kotarbińskiego, Leśniewskiego i Łukasiewicza, przy czym pierwszy z nich był bardziej filozofem niż logikiem.

W monografii tej Tarski pokazał, jak dla przypadku języka, którego zdania są stosownie ograniczone, można sformułować dokładną definicję zwrotu „*jest zdaniem prawdziwym*”. Praca Tarskiego rzuciła światło na kilka pojęć i składników zasadniczych dla analizy pojęcia prawdy. Są one ważne również dla zagadnień innych rodzajów. – Kontakty z filozofią, które Tarski nawiązał jeszcze w czasie studiów,

¹Paradoks (który Tarski odkrył razem z Banachem) opisuje teoretyczną możliwość przekształcenia kuli na dwie kule wielkości takiej samej jak kula wyjściowa. Na możliwość tę, wynikającą z własności zbiorów nieskończonych, zwracano uwagę w piśmiennictwie popularnym przy różnych okazjach.

po opublikowaniu monografii znacznie się poszerzyły. Uczestniczył w licznych kongresach filozoficznych; pisał o semantyce, przy czym część artykułów jest techniczna, część zaś adresowana do szerszego grona słuchaczy. Zasadniczo jednak Tarski nie wykazywał skłonności do filozofii, jeśli już to do matematyki.

Latem 1939 roku Tarski wziął udział w kongresie naukowym w Stanach Zjednoczonych. Wybuch Drugiej Wojny Światowej przeszkodził mu w powrocie do Polski. W 1942 roku został pracownikiem naukowym Uniwersytetu Kalifornijskiego; był z nim związany aż do śmierci, która nastąpiła 27 października 1983.

W Berkeley Tarski zajmował się licznymi zagadnieniami z zakresu podstaw matematyki. W szczególności rozszerzył swe wcześniejsze rozważania dotyczące zagadnień zupełności i rozstrzygalności,² a także aksjomatyzacji geometrii. Ponadto prowadził zakrojone na szeroką skalę badania zagadnień z pogranicza algebry i logiki. Do kategorii tej zalicza się praca nad teorią modeli, której poświęcił się w późniejszych latach; praca ta jest uważana za jedno z jego największych osiągnięć.

Spśród publikacji szczególnie warto odnotować wydaną w 1956 roku po angielsku książkę *Logics, Semantics, Metamathematics*, która będąc zbiorem artykułów Tarskiego na bardziej ogólne tematy z lat 1923-1938 podsumowuje znaczną część jego życia zawodowego. – Za-uważmy tu, że w naukach ścisłych rzadko wraca się do jakiegoś artykułu po latach. Zwykle wtedy mamy już kolejną pozycję i to wydaną bardziej atrakcyjnie, w postaci przeglądu lub książki. Opublikowanie zbioru oryginalnych artykułów oczywiście może być cenne dla celów historycznych lub innych, ale drugie wydanie to naprawdę wielka rzadkość. W przypadku zbioru artykułów Tarskiego drugie wydanie

²Skonstruowanie przez Tarskiego procedury rozstrzygalności dla elementarnych teorii arytmetyki liczb rzeczywistych i geometrii, czyli skonstruowanie algorytmów, w oparciu o które można udowodnić lub obalić dane zdanie z zakresu tych nauk, pozostaje kamieniem milowym w badaniach zagadnień rozstrzygalności. (Por. ods. na str. 143.) Należy jednak przyznać, że omawiane procedury są dość skomplikowane i niezbyt się nadają do szerokiego zastosowania. W szczególności procedura dla geometrii nie uprościłaby dowodów standardowych twierdzeń geometrii nauczanej w liceach. – Z drugiej strony, wraz z upowszechnieniem się komputerów wzrosło zainteresowanie algorytmami i to algorytmami wszelkiego rodzaju, bez względu na to, czy wykorzystuje się je w praktyce, czy nie. Omawiane procedury rozstrzygalności mogą zatem znaleźć miejsce zarówno w *naukach komputerowych*, jak w badaniach metodologicznych.

(które wyszło w 1983 roku) stanowi niezbity dowód wyjątkowej ich wartości.³

Zasługi Tarskiego wykraczają znacznie poza jego publikacje. Wywierał on znaczny wpływ na kolegów, odnosił liczne sukcesy jako nauczyciel. Z ponad dwudziestu doktorantów niespotykane wielu zostało przodującymi logiczami. Tarski ponadto stworzył w Berkeley program studiów logicznych – program, który przyciągał studentów i profesorów z całego świata. Jeszcze teraz, dziesięć lat po jego śmierci, Berkeley wciąż pozostaje ważnym ośrodkiem badania podstaw matematyki.

W 1971 roku w Berkeley na cześć Tarskiego odbyło się międzynarodowe sympozjum. W uznaniu zasług Alfreda Tarskiego wybrano do National Academy of Sciences, do British Academy i do Dutch Academy. Otrzymał trzy doktoraty *honoris causa*.

Nasuwa się tu w sposób naturalny pytanie: Jakiego pokroju człowiekiem był Tarski? Jak oceniali go przyjaciele i koledzy? Co myślał? Na takie pytania zawsze trudno odpowiedzieć. Podamy natomiast garść niepowiązanych ze sobą szczegółów, ufając, że zainteresują czytelnika.

Tarski kładł zwykle wielki nacisk na znaczenie jakości w piśmiennictwie matematycznym, a zwłaszcza na potrzebę uwypuklania aspektów intuicyjnych. Dlatego właśnie, jako recenzent rozpraw doktorskich zawsze przypatrywał się krytycznie przyjętej w nich formie wykładu. Nie wystarczyło podanie wyników i ich dowodów. Należało, na przykład, dokładnie wyjaśnić znaczenie zagadnienia. Definicje musiały być nie tylko precyzyjnie sformułowane, lecz – o ile to możliwe – intuicyjnie zrozumiałe.

Przykładanie do tych rzeczy tak wielkiej wagi służyło różnym celom pedagogicznym, a także odzwierciedlało wrażliwość językową Tarskiego (oraz, rzecz jasna, jego wszechstronne wysokie wymagania). Odzwierciedlało ono też jego głębokie przeświadczenie, że badanie naukowe winno mieć aspekt estetyczny, że powinno mieć udział w zaspokajaniu potrzeb estetycznej natury. – Naturalnie doceniał on także inne źródła ekspresji estetycznej, zwłaszcza poezję i sztukę wi-

³W przygotowaniu obu wydań wzięło czynny udział kilku kolegów Tarskiego. Szczególne zaangażowanie wykazał angielski uczony J. H. Woodger, który przełożył artykuły Tarskiego. Drugie wydanie wyszło dzięki staraniom amerykańskiego filozofa J. Corcorana.

zualną. Na przykład wielką przyjemność sprawiało mu recytowanie ulubionych poetów (w kilku językach).

Tarski miał nie tylko szerokie zainteresowania, czego czytelnik może już się domyślił, ale również lubił zabierać głos na różne tematy. Poza tym, jak wielu ludzi z Polski, wykazywał głębokie emocjonalne zaangażowanie w politykę; objawiał to zwłaszcza podczas pobytu w Berkeley. Przygnębiała go smutna sytuacja polityczna, jaka zapanała na całej kuli ziemskiej. Niekiedy mawiał proroczo: Pewnego dnia obudzimy się i stwierdzimy, że nie ma już tych bestialskich reżimów, że odeszły jak zły sen.

Charakter Tarskiego cechowała silna wolna i ogromna dyscyplina wewnętrzna. Kiedy skupiał się nad pracą, wszystko (prawie) poza nią przestawało dla niego istnieć. To z pewnością pomagało mu osiągać liczne sukcesy, lecz także sprawiało, że należał do ludzi trudnych.

Jeśli chodzi o rozrywki, to szczególną przyjemność czerpał z uprawiania ogrodu. Być może przypominało mu to jego pierwszą pasję intelektualną, którą była biologia. Studia zaczął bowiem od biologii, z której przeniósł się na logikę.

Powróćmy do wczesnego okresu życia Tarskiego. Był starszym z dwóch synów w rodzinie żydowskiej. Rodzice nie zaliczali się do ludzi wybitnych. Wszelako o matce Tarskiego mówiono, że miała nadzwyczajną pamięć. Niewątpliwie Tarski dużo po niej odziedziczył.

Wykształcenie średnie (w gimnazjum) otrzymał na rzadko spotykanym poziomie, o czym może świadczyć fakt, że znał pięć języków, nowożytnych i klasycznych. (Nie licząc języka polskiego, którego z powodu sytuacji politycznej uczył się prywatnie; brał też lekcje hebrajskiego.) W szkole tej uczyli nieprzeciętni nauczyciele; jeden z nich, człowiek z inicjatywą, uzyskał tytuł doktora z matematyki pracując samodzielnie. – W uniwersytecie Tarski studiował pod kierunkiem profesorów, których nazwiska stały się potem sławne. O logikach i filozofach już wspominaliśmy. Wśród nauczycieli matematyki Tarskiego byli Mazurkiewicz i Sierpiński – obaj dokonali znaczącego wkładu do teorii mnogości.

Tarski w pierwszym okresie swego życia zawodowego cierpiał z powodu dwóch głównych niedogodności. Niska pensja docenta⁴ zmuszała go do dorabiania nauczaniem w gimnazjum. W tym czasie zdarzyła mu się tylko jedna okazja poprawy losu, mianowicie gdy we Lwowie utworzono (w 1928 roku) etat dla profesora logiki matematycznej. Nie otrzymał jednak tego stanowiska, a żadne inne możliwości się przed nim nie otwierały. Przez następne dziesięć laty musiał zadowalać się dość niewygodnymi rozwiązaniami. Potem zaś, we wrześniu 1939 roku, znalazłszy się w USA, został odcięty od rodziny i przyjaciół w Polsce. Żona i dwoje dzieci nie mogły się z nim połączyć aż do pierwszych dni 1946 roku.

Kiedy Tarski przybył do Berkeley, był jeszcze człowiekiem ze Starego Świata, z właściwymi dla tego świata przyzwyczajeniami i mentalnością. Do nowego otoczenia adaptował się pod jednymi względami lepiej, pod innymi gorzej. W dalszym ciągu darzył specjalnymi uczuciami swą przeszłość w Warszawie, gdzie spędził dzieciństwo, a potem przeżył okres swej największej inwencji twórczej. Borykał się tam z trudnościami, ale też otaczała go niezapomniana atmosfera intelektualna: bardzo stymulująca, a do tego kryjąca w sobie jakąś magię.

W Berkeley odkrył takie atrakcje jak blisko dostępną przyrodę Zachodu oraz miły klimat. Zaczął sobie cenić powszechnie panującą swobodę. Bardzo polubił Berkeley i okolice, i nigdy nie opuścił miasta na długo, poza jednym wyjazdem na roczny urlop profesorski (tzw. *sabbatical*).

⁴Docentura nie była stanowiskiem etatowym (i nie dawała gwarancji zatrudnienia do emerytury). Docentowi płacono głównie za wykłady. W dawnych czasach stanowiska takie były czymś powszechnym, a i dziś się jeszcze je spotyka.

Część pierwsza

Elementy logiki
Metoda dedukcyjna

I

O użyciu zmiennych

§1 Stałe i zmienne

Każda teoria naukowa jest układem zdań przyjętych za prawdziwe, które można nazwać PRAWAMI lub TWIERDZENIAMI UZNANYMI (czasem mówi się krócej TWIERDZENIA). W matematyce prawa następują po sobie w określonym porządku, stosownie do pewnych zasad, które omówimy szczegółowo w rozdziale VI. Zgodnie z owymi zasadami prawom towarzyszą rozumowania, mające na celu wykazanie ich prawdziwości. Rozumowania takie nazywamy DOWODAMI, zaś prawa przez nie ustalone – TWIERDZENIAMI.

Wśród terminów i symboli, występujących w prawach i dowodach matematycznych, wyróżniamy STAŁE i ZMIENNE.

W arytmetyce, na przykład, występują takie stałe jak „*liczba*”, „*zero*” („0”), „*jeden*” („1”), „*suma*” („+”) oraz wiele innych.¹ Posiadają one ściśle określone znaczenie, nie ulegające zmianie w toku rozważań.

Jako zmiennych używamy z reguły wybranych liter; na przykład w arytmetyce zwykle wybieramy kilka małych liter alfabetu łacińskiego

¹Przez „*arytmetykę*” rozumiemy tutaj tę część matematyki, która bada ogólne własności liczb, związki między liczbami oraz działania na liczbach. Często zamiast słowa „*arytmetyka*” używa się terminu „*algebra*”, zwłaszcza w matematyce nauczanej w liceach. Wolę termin „*arytmetyka*”, ponieważ w matematyce wyższej termin „*algebra*” zarezerwowano dla bardziej szczegółowej teorii równań algebraicznych. (Od pewnego czasu słowo „*algebra*” posiada szersze znaczenie, nieco inne wszelako niż „*arytmetyka*”.) – W książce termin „*liczba*” będzie używany w znaczeniu, które w matematyce przypisuje się zwykle terminowi „*liczba rzeczywista*”; innymi słowy, będzie obejmował on liczby całkowite i ułamki, liczby wymierne i niewymierne, dodatnie i ujemne, ale nie liczby urojone, ani zespolone.

go: „ a ”, „ b ”, „ c ”, ..., „ x ”, „ y ”, „ z ”. W przeciwieństwie do stałych, zmienne nie posiadają samodzielnego znaczenia. Na pytanie o własności zera, na przykład:

Czy zero jest liczbą całkowitą?

można odpowiedzieć twierdząco lub przecząco; odpowiedź ta – prawdziwa czy nie – w obu przypadkach posiada sens. Natomiast na pytanie dotyczące x , na przykład:

Czy x jest liczbą całkowitą?

nie da się udzielić sensownej odpowiedzi.

* * *

W niektórych podręcznikach elementarnej matematyki, zwłaszcza starszych, spotykamy niekiedy sformułowania sugerujące, że zmiennym można nadać samodzielny sens. Znajdujemy tam wyjaśnienie, że symbole „ x ”, „ y ”, ... oznaczają również pewne liczby lub wielkości, które nie są „liczbami stałymi” (jak te oznaczone przez „0”, „1”, ...), lecz tzw. „liczbami zmiennymi” lub „wielkościami zmiennymi”. Stwierdzenia tego rodzaju biorą się z poważnego nieporozumienia. „Liczba zmienna” x , którą próbuje się rozważać, albo nie miałaby żadnej określonej własności – nie będąc ani dodatnia, ani ujemna, ani równa zero, albo jej własności zmieniałyby się od przypadku do przypadku – raz byłaby dodatnia, raz ujemna, a kiedy indziej równa zero. Bytów takich jednak nigdzie na świecie nie spotykamy; istnienie ich byłoby sprzeczne z podstawowymi prawami myślenia. A zatem, podział symboli na stałe i zmienne nie ma odpowiednika w żadnej ze znanych klasyfikacji liczb.

§2 Wyrażenia zawierające zmienne – funkcja zdaniowa i funkcja nazwowa

Z uwagi na fakt, że symbole zmienne nie mają samodzielnego znaczenia, zwrot typu:

x jest liczbą całkowitą

jakkolwiek posiada gramatyczną postać zdania, zdaniem nie jest, nie wyraża bowiem określonego sądu, który dałoby się potwierdzić lub obalić. Możemy jednak powiedzieć, że ze zwrotu:

x jest liczbą całkowitą

otrzymamy zdanie, gdy „ x ” zastąpimy stałą oznaczającą konkretną liczbę; jeśli zamiast „ x ” wstawimy na przykład „1”, otrzymamy zdanie prawdziwe, jeśli „ $\frac{1}{2}$ ” – zdanie fałszywe. Wyrażenie, które zawiera symbole zmienne, a po zastąpieniu ich wyrazami stałymi staje się zdaniem, nazywamy FUNKCJĄ ZDANIOWĄ. Matematycy niechętnie jednak odnoszą się do tego terminu, gdyż wyraz „*funkcja*” stosują w innym znaczeniu. Częściej używają w tym kontekście słowa WARUNEK, a funkcje zdaniowe i zdania, złożone całkowicie z symboli matematycznych (a nie ze słów języka potocznego), jak na przykład:

$$x + y = 5,$$

nazywają WZORAMI lub FORMUŁAMI. Zamiast „*funkcja zdaniowa*” będziemy czasem mówili krótko „*zdanie*” – oczywiście tylko w przypadkach, w których nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

Niekiedy rolę zmiennych w funkcji zdaniowej porównywano – bardzo trafnie – do pustych miejsc w kwestionariuszu, bo podobnie jak kwestionariusz, który nabiera określonej treści po wypełnieniu pustych miejsc, tak funkcja zdaniowa staje się zdaniem po podstawieniu za zmienne stałych. Jeśli w wyniku zastąpienia zmiennych w funkcjach zdaniowych stałymi – tych samych zmiennych tymi samymi stałymi – otrzymujemy zdanie prawdziwe, to o przedmiotach oznaczonych przez te stałe mówimy, że SPEŁNIAJĄ daną funkcję zdaniową. I tak na przykład liczby 1, 2, oraz $2\frac{1}{2}$ spełniają następującą funkcję zdaniową:

$$x < 3,$$

natomiast liczby 3, 4 oraz $4\frac{1}{2}$ jej nie spełniają.[†]

* * *

[†] Aby zilustrować warunek, że te same wyrażenia stałe muszą zastąpić te same symbole zmienne, rozważmy następującą nierówność:

$$x^2 + x + y^2 > 7.$$

Nierówność ta jest spełniona, gdy na przykład w miejsce każdego „ x ” wstawimy „3”, zaś w miejsce „ y ” – „1”; nie jest natomiast spełniona, gdy zarówno „ x ”, jak „ y ” zastąpimy przez „1”.

Poza funkcjami zdaniowymi na uwagę zasługują pewne inne wyrażenia zawierające zmienne, mianowicie FUNKCJE NAZWOWE lub OPISOWE. Są to wyrażenia, które po zastąpieniu zmiennych wyrazami stałymi, stają się nazwami (lub opisami) przedmiotów. Wyrażenie:

$$2x + 1$$

jest funkcją nazwową, ponieważ po zastąpieniu w nim zmiennej „ x ” dowolną stałą liczbową, czyli stałą oznaczającą liczbę, powiedzmy, „2” (przyjmujemy tu zwykłą konwencję, według której „ $2x$ ” oznacza „ $2 \cdot x$ ”), otrzymujemy nazwę pewnej liczby, w tym przypadku liczby 5.

Funkcjami nazwowymi w matematyce są w szczególności wszystkie tzw. wyrażenia algebraiczne, utworzone z symboli zmiennych, ze stałych liczbowych oraz ze znaków czterech podstawowych działań arytmetycznych, czyli wyrażenia typu^{††}:

$$x - y, \quad \frac{x + 1}{y + 2}, \quad 2 \cdot (x + y - z).$$

Natomiast równania algebraiczne, będące wzorami utworzonymi z dwóch wyrażeń algebraicznych połączonych symbolem „=”, są już funkcjami zdaniowymi. Dla równań ustalila się w matematyce odrębna terminologia: zmienne, występujące w równaniach, otrzymały miano niewiadomych, zaś liczby spełniające równanie – pierwiastków równania. Tak na przykład w równaniu:

$$x^2 + 6 = 5x$$

niewiadomą jest zmienna „ x ”, a liczby 2 i 3 są jego pierwiastkami.

* * *

O zmiennych „ x ”, „ y ”, ..., którymi posługujemy się w matematyce, mówimy, że REPREZENTUJĄ NAZWY LICZB, lub że liczby są ich WARTOŚCIAMI. Rozumiemy przez to mniej więcej tyle, że funkcja zdaniowa, zawierająca symbole „ x ”, „ y ”, ... przekształca się w

^{††}Czasami słowa „wzór” używa się również na określenie funkcji nazwowej wyrażonej tylko za pomocą symboli. Na przykład ktoś mógłby powiedzieć, że „ ab ” jest wzorem na pole prostokąta, gdzie a i b oznaczają długości jego boków. Mamy tu dwa zastosowania tego szczególnego słowa – w różnych kontekstach. Podwójne zastosowanie tego samego słowa nie powinno nastroczać trudności, wymaga jednak myślowego rozróżniania między jego dwoma znaczeniami.

zdanie, gdy w ich miejsce wstawimy wyrazy stałe oznaczające liczby (nie zaś wyrażenia oznaczające działania na liczbach, stosunki między liczbami, czy też jakieś przedmioty spoza zakresu arytmetyki – figury geometryczne, zwierzęta, rośliny, itp.). W podobnym sensie zmienne, występujące w geometrii, reprezentują nazwy punktów i figur geometrycznych. Pojęcie nazwy stosuje się także do wyrażeń złożonych, wobec czego funkcje nazwowe, które spotykamy w arytmetyce, podobnie jak same zmienne, reprezentują nazwy liczb. Niekiedy mówimy po prostu, że symbole „ x ”, „ y ”, ... i utworzone z nich funkcje nazwowe oznaczają liczby, lub, że są nazwami liczb, ale trzeba pamiętać, że jest to tylko skrótowy sposób mówienia.

§3 Konstrukcja zdań, w których występują zmienne – zdania ogólne i egzystencjalne

Poza zastępowaniem zmiennych stałymi istnieje jeszcze inny sposób tworzenia zdań z funkcji zdaniowych. Weźmy pod uwagę wzór:

$$x + y = y + x.$$

Mamy tu funkcję zdaniową, która zawiera dwie zmienne, „ x ” i „ y ”, i jest spełniona przez dowolną parę liczb; bez względu na to, jakie stałe wstawimy w miejsce „ x ” i „ y ” – zawsze otrzymamy wzór prawdziwy. Fakt ten wyrażamy krótko w sposób następujący:

$$\text{dla dowolnych liczb } x \text{ i } y, \quad x + y = y + x.$$

Wyrażenie to stanowi już autentyczne zdanie i to zdanie prawdziwe, w którym rozpoznajemy jedno z podstawowych praw arytmetyki, mianowicie prawo przemienności dodawania. W podobny sposób formułujemy wiele innych ważnych praw matematycznych – wszelkie tzw. PRAWA OGÓLNE lub PRAWA O CHARAKTERZE OGÓLNYM, orzekające, że dowolne przedmioty pewnej kategorii (na przykład w arytmetyce są to dowolne liczby) mają te czy inne własności. Warto zauważyć, że przy formułowaniu prawa ogólnego często opuszczamy zwrot „*dla dowolnych przedmiotów (lub liczb) $x, y, \dots$* ” – należy się go wówczas domyślać; na przykład prawo przemienności dodawania podaje się po prostu w następującej postaci:

$$x + y = y + x.$$

Jest to zwyczaj dość rozpowszechniony, do którego przeważnie będziemy się stosowali w toku dalszych rozważań.

* * *

Rozpatrzmy z kolei funkcję zdaniową:

$$x > y + 1.$$

Nie każda para liczb spełnia ten wzór; podstawiając, powiedzmy, „3” za „ x ”, a „4” za „ y ”, otrzymujemy zdanie fałszywe:

$$3 > 4 + 1.$$

Mówiąc zatem:

dla dowolnych liczb x i y , $x > y + 1$,

wypowiadamy niewątpliwie zdanie sensowne, ale jawnie fałszywe. Z drugiej strony istnieją takie pary liczb, które spełniają rozważaną funkcję zdaniową; zastępując na przykład „ x ” przez „4” i „ y ” przez „2”, otrzymujemy wzór prawdziwy:

$$4 > 2 + 1.$$

Tę właśnie okoliczność stwierdzamy krótko słowami:

dla niektórych liczb x i y , $x > y + 1$,

lub w częściej używanej postaci:

istnieją takie liczby x i y , że $x > y + 1$.

Przytoczone wyrażenia są już zdaniami prawdziwymi; stanowią one przykłady ZDAŃ EGZYSTENCJALNYCH lub ZDAŃ O CHARAKTERZE EGZYSTENCJALNYM, które stwierdzają istnienie przedmiotów, na przykład liczb, posiadających pewną własność.

Za pomocą opisanych metod możemy tworzyć zdania z dowolnej funkcji zdaniowej, przy czym od treści funkcji zdaniowej zależy, czy otrzymamy zdanie prawdziwe, czy fałszywe. Dodajmy tu jeszcze następujący przykład. Wzoru:

$$x = x + 1$$

nie spełnia żadna liczba, i bez względu na to, jakimi słowami go poprzedzimy – „*dla dowolnej liczby x* ” czy „*istnieje taka liczba x , że*” – zawsze otrzymamy w wyniku zdanie fałszywe.

* * *

W odróżnieniu od zdań o charakterze ogólnym i zdań o charakterze egzystencjalnym, zdania, które nie zawierają żadnych zmiennych, na przykład:

$$3 + 2 = 2 + 3,$$

nazywamy ZDANIAMI JEDNOSTKOWYMI. Klasyfikacja ta nie jest jednak wyczerpująca. Jako przykład zdania, którego nie potrafilibyśmy zaliczyć do żadnej z tych trzech kategorii, podamy prawo:

dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że

$$x = y + z.$$

Zdania takie nazywamy ZDANIAMI WARUNKOWO-EGZYSTENCJALNYMI (w odróżnieniu od rozważanych wyżej zdań egzystencjalnych, zwanych również ZDANIAMI ABSOLUTNIE-EGZYSTENCJALNYMI); zdania warunkowo-egzystencjalne stwierdzają istnienie liczb posiadających pewną własność, uzależniając to jednak od uprzedniego wyboru pewnych innych liczb.

§4 Kwantyfikatory ogólne i egzystencjalne; zmienne wolne i związane

Wyrażenia typu:

dla dowolnych liczb $x, y, \dots$

oraz

istnieją takie liczby $x, y, \dots$, że

noszą nazwę KWANTYFIKATORÓW; pierwszy nazywamy KWANTYFIKATOREM OGÓLNYM, drugi – EGZYSTENCJALNYM. Kwantyfikatory utożsamia się czasem z OPERATORAMI; istnieją jednak wyrażenia, które są operatorami, nie będąc przy tym kwantyfikatorami. W poprzednim paragrafie staraliśmy się wyjaśnić sens obu rodzajów kwantyfikatorów. Ich doniosłość wynika z faktu, że jedynie dzięki obecności (jawnej lub domysłej) kwantyfikatorów lub innych operatorów wyrażenie zawierające zmienne jest zdaniem, czyli wypowiedzią ściśle określonej myśli; bez pomocy kwantyfikatorów nie moglibyśmy się posługiwać zmiennymi przy formułowaniu praw matematycznych.

* * *

W języku codziennym nie używamy zazwyczaj zmiennych (choć w zasadzie nie ma przeciwwskazań), niepotrzebne więc są nam również kwantyfikatory. W powszechnym natomiast użyciu są słowa, które pozostają w bardzo ścisłym związku z kwantyfikatorami, mianowicie słowa „każdy”, „wszyscy”, „pewien”, „niektórzy”. Związek ten staje się oczywisty, kiedy zauważymy, że wyrażenia takie jak:

wszyscy ludzie są śmiertelni

lub

niektórzy ludzie są mądrzy

mają w przybliżeniu ten sam sens co zdania, sformułowane za pomocą kwantyfikatorów zgodnie z następującymi schematami:

dla dowolnego x , jeśli x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny

oraz

istnieje taki x , że x jest człowiekiem i x jest mądry.

* * *

Kwantyfikatory zwykle się dla wygody zastępować wyrażeniami symbolicznymi. Zamiast:

dla dowolnych przedmiotów (lub liczb) $x, y, \dots$

oraz

istnieją takie przedmioty (lub liczby) $x, y, \dots$, że

będziemy używać odpowiednio symboli:

$\forall_{x,y,\dots}$ oraz $\exists_{x,y,\dots}$

(a funkcje zdaniowe następujące po kwantyfikatorach będziemy umieszczać w nawiasach). W ten sposób stwierdzenie podane na końcu poprzedniego paragrafu jako przykład zdania warunkowo-egzystencjalnego przybierze następującą postać:

(I) $\forall_{x,y} \exists_z (x = y + z).$

* * *

Funkcja zdaniowa, w której występują zmienne „ x ”, „ y ”, „ z ”, ..., stanie się automatycznie zdaniem, gdy poprzedzimy ją jednym lub kilkoma operatorami zawierającymi wszystkie te zmienne; w przypadku braku w operatorach niektórych zmiennych rozważane wyrażenie może pozostać funkcją zdaniową, nie przechodząc w zdanie. Tak na przykład wzór:

$$x = y + z$$

stanie się zdaniem, jeśli na początku umieścimy któryś ze zwrotów:

dla dowolnych liczb x, y oraz z ;

istnieją takie liczby x, y, z , że;

dla dowolnych liczb x i y , istnieje taka liczba z , że;

i tak dalej. Jeśli natomiast wzór poprzedzimy kwantyfikatorem:

istnieje taka liczba z , że lub $\exists_z$

to zdania jeszcze nie otrzymamy. Wyrażenie:

$$(II) \quad \exists_z(x = y + z)$$

jest niewątpliwie funkcją zdaniową; stanie się bowiem zdaniem, gdy w miejsce „ x ” i „ y ” wstawimy odpowiednie stałe, nie ruszając przy tym „ z ”, lub gdy poprzedzimy go odpowiednim kwantyfikatorem, na przykład:

dla dowolnych liczb x i y czy $\forall_{x,y}$.

Widać stąd, że wśród zmiennych, wchodzących w skład funkcji zdaniowej, dają się wyróżnić dwie odmienne grupy. Zmienne z pierwszej grupy – będziemy je nazywać ZMIENNYMI WOLNYMI lub RZECZYWISTYMI – decydują o tym, że rozważane wyrażenie jest funkcją zdaniową, a nie zdaniem. Aby przekształcić funkcję zdaniową w zdanie, trzeba zmienne wolne zastąpić stosownymi stałymi lub na początku funkcji zdaniowej umieścić operatory, zawierające owe zmienne wolne (lub też dokonać modyfikacji obu rodzajów). Pozostałe zmienne, czyli ZMIENNE ZWIĄZANE lub POZORNE, przy takim przekształceniu funkcji zdaniowej nie podlegają żadnym modyfikacjom. Tak na przykład w funkcji zdaniowej (II) zmienne „ x ” i „ y ” są wolne, zaś symbol „ z ” występuje dwukrotnie jako zmienna związana; wyrażenie (I) natomiast jest zdaniem, wobec czego zawiera tylko zmienne związane.

* * *

*O tym, które zmienne są wolne, a które związane, decyduje budowa funkcji zdaniowej, tj. obecność i położenie operatorów. Najlepiej widać to na konkretnym przykładzie. Rozważmy następującą funkcję zdaniową:

$$(III) \quad \text{dla dowolnej liczby } x, \text{ jeśli } x = 0 \text{ lub } y \neq 0, \\ \text{to istnieje taka liczba } z, \text{ że } x = y \cdot z.$$

Funkcja ta rozpoczyna się od kwantyfikatora ogólnego zawierającego zmienną „ x ”, wobec czego zmienna „ x ”, która pojawia się trzy razy w funkcji, występuje w niej wszędzie w roli zmiennej związanej; w pierwszym miejscu stanowi część kwantyfikatora, w pozostałych dwóch jest, jak mówimy, ZWIĄZANA PRZEZ KWANTYFIKATOR. Podobnie rzecz ma się ze zmienną „ z ”. Nie występuje ona wprawdzie w kwantyfikatorze na początku wyrażenia (III), ale zawiera ją kwantyfikator egzystencjalny otwierający drugą część wyrażenia (III), którą jest funkcja zdaniowa:

$$(IV) \quad \text{istnieje taka liczba } z, \text{ że } x = y \cdot z.$$

Oba miejsca w wyrażeniu (III), w których występuje zmienna „ z ”, zawarte są w funkcji częściowej, przedstawionej w postaci (IV). Mówimy więc, że w wyrażeniu (III) „ z ” występuje w obu miejscach jako zmienna związana; w pierwszym miejscu stanowi ona część kwantyfikatora egzystencjalnego, w drugim jest związana przez ten kwantyfikator. Co zaś do zmiennej „ y ”, również występującej w wyrażeniu (III), to widzimy, że w wyrażeniu tym nie ma kwantyfikatora, który by ją zawierał, wobec czego zmienna „ y ” występuje w wyrażeniu (III) dwukrotnie jako zmienna wolna.

Fakt, że kwantyfikatory wiążą zmienne – tj., że w funkcjach, które po nich następują, zmienne wolne przekształcają się w zmienne związane – stanowi bardzo ważną cechę kwantyfikatorów. Znamy kilka innych wyrażen posiadających analogiczną własność; z niektórymi zapoznamy się później (w §§ 20 i 22), a jeszcze inne – takie jak na przykład znak całkowania – są istotne w rachunku całkowym i w rozmaitych gałęziach wyższej matematyki. Nazwa „operator” jest ogólnym terminem używanym do określenia wszystkich wyrażen posiadających tę własność.^{†*}

[†]Może to być odpowiednie miejsce do zrobienia dwóch uwag na temat terminów, które wprowadziliśmy. Słowo „operator” ma rozmaite konotacje; używa się go

§5 Znaczenie zmiennych w matematyce

Jak przekonaaliśmy się w §3, zmienne odgrywają doniosłą rolę przy budowaniu praw matematycznych. Jednakże z tego, co do tej pory powiedzieliśmy, nie wynika, by formułowanie praw matematycznych bez użycia zmiennych było zasadniczo niemożliwe. W praktyce wszelako jest to niemal niewykonalne, ponieważ nawet proste stosunkowo prawa przybierają wówczas skomplikowaną i nieprzejrzyłą postać. Dla ilustracji weźmy pod uwagę takie prawo arytmetyki:

$$\text{dla dowolnych liczb } x \text{ i } y, \quad x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2).$$

Wypowiedzmy je następnie bez pomocy zmiennych:

różnica sześciątów dowolnych dwóch liczb równa się różnicy tych liczb pomnożonej przez sumę trzech składników, z których pierwszy jest kwadratem pierwszej liczby, drugi – iloczynem obu liczb, a trzeci – kwadratem drugiej liczby.

Jeszcze istotniejsze znaczenie z punktu widzenia ekonomii myślenia posiadają symbole zmienne dla dowodów matematycznych. Czytelnik przekona się o tym z łatwością, próbując uwolnić od zmiennych którykolwiek z dowodów, które znajdzie w toku naszych dalszych rozważań. Należy przy tym wziąć pod uwagę, że dowody te są o wiele prostsze od przeciętnych rozumowań, spotykanych w różnych gałęziach matematyki wyższej; próby poprawnego przeprowadzenia takich rozumowań bez użycia zmiennych, nastęrczałyby ogromne trudności. Warto też wspomnieć, że wprowadzeniu zmiennych zawdzięczamy rozwój tak płodnej metody rozwiązywania zagadnień, jaką jest metoda równań. Nie przesadzimy mówiąc, że *wynalezienie zmiennych stanowi punkt zwrotny w dziejach matematyki; dzięki symbolom tym człowiek zdobył narzędzie, które utorowało drogę rozwojowi wiedzy matematycznej i ugruntowało jej logiczne podstawy.*²

w różnych kontekstach – w logice, w matematyce, w życiu codziennym. Aby uniknąć nieporozumień możemy o rozważanych wyrażeniach mówić „operatory wiążące zmienne”. Co zaś do „funkcji zdaniowych” (lub „warunków”), to spotyka się też inne terminy w tym znaczeniu. Na przykład w *Principia Mathematica* dla analogicznych zwrotów znajdujemy nazwę „funkcji propozycyjalnych” (por. ods. 1, str. 20). Ponadto zwroty takie ostatnio nazywa się także FORMAMI ZDANIOWYMI.

²Zmiennymi posługiwali się już w starożytności matematycy i logicy greccy – co prawda tylko w specjalnych sytuacjach lub sporadycznych wypadkach. Na początku XVII wieku, głównie pod wpływem prac francuskiego matematyka F. VIETA’y (1540–1603), zaczęto operować zmiennymi w sposób systematyczny

Ćwiczenia

1. Które z podanych niżej wyrażeń są funkcjami zdaniowymi, a które funkcjami nazwowymi?

- (a) *x jest podzielne przez 3,*
- (b) *suma liczb x i 2,*
- (c) $y^2 - z^2,$
- (d) $y^2 = z^2,$
- (e) $x + 2 < y + 3,$
- (f) $(x + 3) - (y + 5),$
- (g) *matka x'a i z'a,*
- (h) *x jest matką z'a.*

2. Podać przykłady funkcji zdaniowych i nazwowych z dziedziny geometrii.

3. Spotykane w matematyce funkcje zdaniowe, zawierające tylko jedną zmienną (która niekiedy pojawia się w kilku miejscach danej funkcji zdaniowej), można podzielić na trzy kategorie: (i) funkcje spełnione przez każdą liczbę; (ii) funkcje nie spełnione przez żadną liczbę; (iii) funkcje, które są spełnione przez pewne liczby, a przez inne – nie.

Określić, do których z tych kategorii należą następujące funkcje zdaniowe:

- (a) $x + 2 = 5 + x,$
- (b) $x^2 = 49,$
- (c) $(y + 2) \cdot (y - 2) < y^2,$
- (d) $y + 24 > 36,$
- (e) $z = 0 \text{ lub } z < 0 \text{ lub } z > 0,$
- (f) $z + 24 > z + 36.$

4. Podać przykłady praw ogólnych, absolutnie egzystencjalnych oraz warunkowo-egzystencjalnych z dziedziny arytmetyki i geometrii.

5. Poprzedzając funkcję zdaniową „ $x > y$ ” kwantyfikatorami możemy utworzyć z niej różne zdania, na przykład:

*dla dowolnych liczb x i y, $x > y$;
dla dowolnej liczby x istnieje liczba y taka, że $x > y$;
istnieje taka liczba y, że dla dowolnej liczby x, $x > y$.*

i stosować je konsekwentnie w rozważaniach matematycznych. Ale dopiero w końcu XIX wieku, kiedy ustaliło się pojęcie kwantyfikatorów, doceniono w pełni rolę zmiennych w języku naukowym, a szczególnie przy formułowaniu wzorów i dowodzeniu praw matematycznych; było to w dużej mierze zasługą wybitnego amerykańskiego logika i filozofa C. S. PEIRCE'a (1839–1914).

Sformułować wszystkie te zdania (jest ich sześć) i określić, które z nich są prawdziwe.

6. Wykonać polecenie z zadania 5 dla następujących funkcji zdaniowych:

$$x + y^2 > 1$$

x jest ojcem y'a

(przyjąć, że w drugiej funkcji zdaniowej zmienne „x” i „y” reprezentują imiona ludzi).

7. Zdanie

dla każdego x, jeśli x jest psem, to x ma dobry węch

przekształcić w równoznaczne zdanie z języka codziennego, sformułowane bez użycia kwantyfikatorów i zmiennych.

8. Zdanie

niektóre węże są jadowite

zastąpić równoznacznym zdaniem, sformułowanym z użyciem kwantyfikatorów i zmiennych.

9. W następujących wyrażeniach wskazać zmienne wolne i zmienne związane:

(a) *x jest podzielne przez y;*

(b) *dla dowolnego x, $x - y = x + (-y)$;*

(c) *jeśli $x < z$, to istnieje taka liczba y, że $x < y$ i $y < z$;*

(d) *dla dowolnej liczby y, jeśli $y > 0$, to istnieje taka liczba z, że $x = y \cdot z$;*

(e) *jeśli $x = y^2$ i $y > 0$, to dla dowolnej liczby z, $x > -z^2$;*

(f) *jeśli istnieje taka liczba y, że $x > y^2$, to dla dowolnej liczby z, $x > -z^2$.*

Zapisać powyższe wyrażenia zastępując kwantyfikatory symbolami wprowadzonymi w §4.

***10.** Po wstawieniu „ y ” w miejsce zmiennej „ z ”, występującej dwukrotnie w funkcji zdaniowej (e) z poprzedniego ćwiczenia, otrzymamy wyrażenie, w którym „ y ” w pewnych miejscach jest zmienną wolną, a w innych – związaną. Określić, w których miejscach jaką zmienną jest „ y ”.[†]

(Wobec pewnych trudności w operowaniu wyrażeniami, w których ta sama zmienna występuje raz jako związana, a raz jako wolna, niektórzy logicy starają się unikać takich wyrażen i nie traktują ich jako funkcji zdaniowych.)

***11.** Opisać ogólnie, kiedy zmienna występuje w pewnym miejscu danej funkcji zdaniowej jako wolna, a w jakich – jako związana.

12. Ustalić, które liczby spełniają funkcję zdaniową:

$$\text{istnieje taka liczba } y, \text{ że } x = y^2,$$

oraz

$$\text{istnieje taka liczba } y, \text{ że } x \cdot y = 1.$$

***13.** W §4 wprowadziliśmy kilka symboli kwantyfikatorów. W rozdziale II dodamy do nich symbole takie jak „ $\sim$ ”, „ $\wedge$ ”, „ $\vee$ ”, „ $\rightarrow$ ” i „ $\leftrightarrow$ ”, by zastąpić odpowiednie wyrażenia z języka codziennego: „*nie*”, „*lub*”, „*jeśli ... , to ...*”, i „*wtedy i tylko wtedy*”. Przetłumaczyć następujące wzory na zwykły język:

- (a) $\forall x[(x = y \vee y < x) \leftrightarrow \sim(x < y)],$
- (b) $\exists x[(0 < x \wedge x < y) \wedge \sim(x + 1 = y)],$
- (c) $\forall_{x,y}[x + y = 4 \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)].$

Wyrazić następujące funkcje zdaniowe za pomocą symboli logicznych[‡]:

[†]W sytuacjach takich, jak w tym ćwiczeniu zamiast o zmiennych wolnych i zmiennych związanych właściwiej byłoby mówić o wolnym i związanym występowaniu zmiennych w danej funkcji zdaniowej. W praktyce jednak czasem brzmi to niezgrabnie.

[‡]Niektóre z następujących wyrażen mogą się wydawać nie funkcjami zdaniowymi, a zdaniami. Wszelako traktowanie zdania, jako specjalnego przypadku funkcji zdaniowej, mianowicie przypadku, kiedy liczba zmiennych wolnych redukuje się do zera, jest właściwe. (Analogicznie stałą taką jak „*dwa*” wolno nam uważać za spe-

- (d) *Dla dowolnej liczby x istnieją takie liczby y i z , że $y < x$ i $x < z$.*
- (e) *Dla każdego x , $x^2 + 6 = 5y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$ lub $x = 3$.*
- (f) *Istnieją takie x i y , że $x < y$, nie zachodzi natomiast przypadek, że dla każdego z , $x + z < y + z$.*

Wskazać które zmienne w funkcjach zdaniowych (a)–(f) są wolne, a które – związane. W przypadku, gdy pewne zmienne okażą się wolne, podać, o ile to możliwe, przykłady liczb spełniających daną funkcję zdaniową oraz przykłady liczb jej nie spełniających. Jeśli funkcja zdaniowa jest zdaniem, określić, czy jest ono prawdziwe czy fałszywe.

cialny przypadek funkcji nazwowej.) Uwagi te można przeciwstawić rozważaniom z §2, pozwalającym funkcję zdaniową czasami nazywać zdaniem. Takie użycie ma trochę inny sens, lecz dla wygody toleruje się to lekkie nadużycie językowe.

II

O rachunku zdań

§6 Stałe logiczne; logika dawna i obecna

Wyrazy stałe, z którymi mamy do czynienia w jakiegokolwiek dziedziny nauki, można podzielić na dwie obszerne grupy. Grupę pierwszą tworzą wyrazy o charakterze specyficznym dla danej nauki. W arytmetyce, na przykład, są to wyrazy oznaczające poszczególne liczby, bądź całe zbiory liczb, stosunki między liczbami, działania na liczbach, itp.; należą tu, między innymi, te wyrazy stałe, które podaliśmy przykładowo w § 1. Z drugiej strony, w większości praw arytmetycznych występują także wyrazy znacznie ogólniejszej natury – wyrazy, które się stale spotyka w życiu codziennym i we wszelkich możliwych gałęziach wiedzy i które stanowią niezbędny środek dla wyrażania myśli ludzkich i prowadzenia rozumowań w każdym zakresie. Są nimi słowa takie, jak „*nie*”, „*i*”, „*lub*”, „*jest*”, „*każdy*”, „*niektóre*” oraz wiele innych. Precyzyjny sens tych wyrazów oraz najogólniejsze prawa, które nimi rządzą, ustala LOGIKA, dyscyplina uważana za podstawę wszystkich innych nauk.

Logika stała się odrębną nauką bardzo dawno temu, wcześniej nawet niż arytmetyka i geometria. Ale dopiero stosunkowo niedawno, w drugiej połowie XIX wieku – po długim okresie zupełnego niemal zastoju – dyscyplina ta rozpoczęła intensywny rozwój, w czasie którego przeszła całkowitą przemianę i nabrała charakteru podobnego naukom matematycznym. W tej nowej postaci znana jest pod nazwą LOGIKI MATEMATYCZNEJ lub LOGIKI SYMBOLICZNEJ, dawniej nosiła też miano LOGISTYKI. Nowa logika pod niejednym względem przewyższa dawną – nie tylko trwałością podstaw i doskonałością metod,

którym zawdzięcza rozwój, lecz przede wszystkim bogactwem zbadanych pojęć i odkrytych praw. Dawna, tradycyjna logika stanowi w gruncie rzeczy tylko część nowej, która zresztą – z punktu widzenia wymagań innych nauk, zwłaszcza matematyki – jest zupełnie nieistotna. Mając to na uwadze, tudzież cel, jaki sobie stawiamy, w niniejszej książce bardzo rzadko będziemy się odwoływać do dawnej logiki.¹

§7 Rachunek zdań; negacja zdania, koniunkcja i alternatywa zdań

Wśród wyrazów o charakterze logicznym wyróżniamy nieliczną grupę słów takich jak „nie”, „i”, „lub”, „jeśli . . . , to . . .”. Słowa te, dobrze nam znane z języka codziennego, służą do budowania zdań złożonych ze zdań prostszych. W gramatyce zaliczamy je do tzw. spójników. Już tylko z tego powodu występowania ich w jakiejś wybranej nauce nie należy uważać za jej specjalną cechę. Określenie dokładnego znaczenia i zastosowania tych wyrazów, znanych także pod nazwą SPÓJNIKÓW ZDANIOWYCH, jest zadaniem najbardziej elementarnego i podstawowego działu logiki, który nazywamy RACHUNKIEM ZDAŃ, RACHUNKIEM ZDANIOWYM, lub LOGIKĄ ZDANIOWĄ.^{2†}

Omówimy teraz sens najważniejszych wyrazów rachunku zdań.

¹Twórcą logiki jest ARYSTOTELES, sławny myśliciel grecki, z IV w.p.n.e. (384–322); jego prace logiczne zebrane są w dziele *Organon*. Za twórcę logiki matematycznej uważa się wielkiego niemieckiego filozofa i matematyka z XVII wieku G. W. LEIBNIZA (1646–1716). Prace logiczne LEIBNIZA nie wywarły jednak większego wpływu na dalszy rozwój badań logicznych, a w pewnym okresie zupełnie o nich zapomniano. Ciągły rozwój logiki matematycznej datuje się dopiero od połowy XIX w., tj. od czasu opublikowania systemu logicznego angielskiego matematyka G. BOOLE'A (1815–1864; główne dzieło: *An Investigation of the Laws of Thought*, Londyn 1854). Później nowa logika znalazła pełny wyraz w epokowym dziele dwóch wielkich logików angielskich A. N. WHITEHEADA (1861–1947) i B. RUSSELLA (1872–1970): *Principia Mathematica* (Cambridge 1910–1913).

²Historycznie pierwsze systematyczne przedstawienie rachunku zdaniowego zawarte jest w dziele *Begriffsschrift* (Halle 1879) niemieckiego logika G. FREGEGO (1848–1925), największego niewątpliwie logika XIX wieku. Wybitny polski logik i historyk logiki J. ŁUKASIEWICZ (1878–1956) rachunkowi zdań nadał nader prostą i precyzyjną formę, a także zainicjował rozległe badania związane z tym rachunkiem.

†Bliższe omówienie terminów „rachunek” i „logika” czytelnik znajdzie w odsyłaczu na str. 66.

* * *

Za pomocą słowa „*nie*” tworzymy przeczenie, czyli NEGACJĘ ZDANIA; dwa zdania, z których jedno jest negacją drugiego nazywamy ZDANIAMI SPRZECZNYMI. W rachunku zdań słowo „*nie*” stawia się na początku zdania, natomiast w języku potocznym towarzyszy ono zwykle orzeczeniu; w przypadku gdy „*nie*” pożądane jest na początku zdania, zastępujemy je wyrażeniem „*nie jest prawdą, że*”. I tak przeczenie zdania:

1 jest dodatnią liczbą całkowitą,

brzmi:

1 nie jest dodatnią liczbą całkowitą,

lub:

nie jest prawdą, że 1 jest dodatnią liczbą całkowitą.

Negacją zdania posługujemy się, ilekroć chcemy wyrazić myśl, że zdanie jest fałszywe; negacja zdania fałszywego jest prawdziwa, a zdania prawdziwego – fałszywa.

* * *

Kiedy dwa zdania (lub więcej) połączymy słowem „*i*”, otrzymamy tzw. KONIUNKCJĘ, czyli ILOCZYN LOGICZNY. Zdania tak połączone noszą nazwę CZŁONÓW KONIUNKCJI lub CZYNNIKÓW ILOCZYNU LOGICZNEGO. Połączenie w ten sposób zdania:

2 jest dodatnią liczbą całkowitą,

ze zdaniem:

$2 < 3,$

da nam następującą koniunkcję:

2 jest dodatnią liczbą całkowitą i $2 < 3$.

Stwierdzenie koniunkcji dwóch zdań równoważne jest stwierdzeniu, że oba zdania są prawdziwe. Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy oba zdania są prawdziwe; jeśli przynajmniej jeden z członów jest fałszywy, to cała koniunkcja jest fałszywa.

* * *

Łącząc zdania za pomocą słowa „lub”, otrzymuje się ALTERNATYWĘ tych zdań, nazywaną także SUMĄ LOGICZNĄ. Zdania tworzące alternatywę noszą nazwę CZŁONÓW ALTERNATYWY lub SKŁADNIKÓW SUMY LOGICZNEJ. Zauważmy, że w języku codziennym słowo „lub” ma co najmniej dwa różne znaczenia. W tak zwanym NIEWYŁĄCZAJĄCYM ZNACZENIU alternatywa dwóch zdań wyraża tylko, że przynajmniej jedno z tych zdań jest prawdziwe, nie mówi natomiast nic o prawdziwości obu zdań naraz; w drugim znaczeniu, WYŁĄCZAJĄCYM, alternatywa dwóch zdań oznacza, że jedno zdanie jest prawdziwe, drugie zaś fałszywe. Dla zilustrowania powyższego wyobraźmy sobie, że w księgarni wywieszono następujące ogłoszenie:

Klientom, którzy są nauczycielami lub studentami, udzielamy zniżki.

Słowa „lub” użyto tutaj niewątpliwie w pierwszym znaczeniu, ponieważ nikt nie odmówi zniżki nauczycielowi, który jednocześnie jest studentem. Z drugiej strony, jeśli dziecko prosi, żeby rano zabrać je na wycieczkę do lasu, popołudniu zaś do kina, a my odpowiadamy:

nie, pojedziemy na wycieczkę lub pójdziemy do kina,

to niewątpliwie używamy słowa „lub” w drugim znaczeniu, jako że zamierzamy spełnić tylko jedno z tych życzeń. W logice i w matematyce słowa „lub” używamy zawsze w pierwszym, niewyłączającym znaczeniu. Alternatywę dwóch zdań traktujemy jako prawdziwą, gdy przynajmniej jedno z jej zdań składowych jest prawdziwe, w przeciwnym razie uważamy ją za fałszywą. Na przykład możemy stwierdzić:

każda liczba jest dodatnia lub mniejsza od 3,

choć istnieją liczby dodatnie i jednocześnie mniejsze od 3. Aby uniknąć nieporozumień należałoby – zarówno w języku potocznym, jak naukowym – używać słowa „lub” tylko w niewyłączającym znaczeniu, a w wyłączającym – zastępować je wyrażeniem złożonym „albo ... albo”.

* * *

*Nawet jeśli ograniczymy się do przypadków, w których słowo „*lub*” występuje w pierwszym znaczeniu, łatwo dostrzeżemy różnice między użyciem go w języku codziennym i w logice. W języku powszechnym słowem „*lub*” łączymy dwa zdania powiązane do pewnego stopnia formą i treścią. (To samo odnosi się, choć może w mniejszym stopniu, do użycia słowa „*i*”). Nie jest całkiem jasne na czym to powiązanie polega, każda zaś próba jego szczegółowej analizy i opisu nastroczałaby nie lada trudności. Jak zobaczymy, współczesna logika nie przywiązuje do tego wagi i konsekwentnie dopuszcza przytaczanie dziwacznych przykładów. Ktoś nie zaznajomiony z językiem logiki przypuszczalnie nie powie, że wyrażenie w rodzaju:

$2 \cdot 2 = 5$ *lub* *Nowy Jork jest dużym miastem*

brzmi rozsądnie, a tym bardziej nie uzna go za zdanie prawdziwe. Poza tym na użycie słowa „*lub*” w mowie potocznej wpływają pewne czynniki psychologiczne. Zwykle stosujemy alternatywę dwóch zdań wtedy, gdy myślimy, że jedno z nich jest prawdziwe, nie wiemy jednak które. Patrząc, na przykład, na trawnik w normalnym świetle, nie powiemy, że trawnik jest zielony lub niebieski, gdyż jesteśmy w stanie wygłosić prostsze a jednocześnie silniejsze stwierdzenie, mianowicie że trawnik jest zielony. Czasami użycie alternatywy przez rozmówcę traktujemy zgoła jako przyznanie się do faktu, że on czy ona nie wie, który człon alternatywy jest prawdziwy, a który fałszywy. Jeśli więc później okaże się, że rozmówca wiedział, że jedno ze zdań jest fałszywe, a w dodatku wiedział które, to całą alternatywę uznamy za zdanie fałszywe, mimo że jeden z jej członów był niewątpliwie prawdziwy. Wyobraźmy sobie, na przykład, że znajomy zapytany, kiedy wyjeżdża z miasta, odpowie, że dziś, lub jutro, lub dopiero pojutrze. Dowiedziawszy się, że znajomy w czasie naszej rozmowy zdecydowany był wyjechać jeszcze tego samego dnia, prawdopodobnie odniesiemy wrażenie, że nas rozmyślnie wprowadził w błąd.

Kiedy twórcy współczesnej logiki wprowadzali do swych rozważań słowo „*lub*”, pragnęli – być może podświadomie – uprościć jego znaczenie; w szczególności starali się uczynić je jasnym oraz niezależnym od wszelkich psychologicznych czynników, a już szczególnie takich, jak wiedza czy niewiedza. Zdecydowali się więc rozszerzyć użycie słowa „*lub*” i traktować alternatywę dowolnych dwóch zdań jako mającą sens całość, nawet jeśli nie zachodzi związek między ich formą i treścią. Postanowili też, że prawdziwość alternatywy – podobnie jak w przypadku negacji czy koniunkcji – będzie zależna tylko od prawdziwości jej członów. Tak więc osoba posługująca się słowem „*lub*” zgodnie ze współczesną logiką, potraktuje wyrażenie:

$2 \cdot 2 = 5$ *lub* *Nowy Jork jest dużym miastem*

jako zdanie mające sens i faktycznie prawdziwe, ponieważ jego druga część jest niewątpliwie prawdziwa. Podobnie, jeśli przyjmiemy, że znamy, którego pytaliśmy o termin wyjazdu, użył słowa „*lub*” w czystym logicznym znaczeniu, będziemy zmuszeni uznać jego odpowiedź za prawdziwą, bez względu na to, co sądzymy o jego intencjach.*

§8 Implikacje lub zdania warunkowe; implikacje w znaczeniu materialnym

Łącząc dwa zdania słowami „*jeśli ... , to ...*”, otrzymujemy zdanie złożone, zwane IMPLIKACJĄ lub ZDANIEM WARUNKOWYM. Zdanie podrzędne zaczynające się od słowa „*jeśli*” nazywamy POPRZEDNIKIEM, a zdanie nadrzędne poprzedzone słowem „*to*” – NASTĘPNIKIEM. Wygłaszając implikację, stwierdzamy tym samym, że poprzednik nie może być prawdą, gdy następnik jest fałszem. Implikacja jest więc prawdziwa w każdym z następujących trzech przypadków: (i) zarówno poprzednik, jak następnik są prawdziwe; (ii) poprzednik jest fałszywy, zaś następnik prawdziwy; (iii) zarówno poprzednik, jak następnik są fałszywe. Tylko w czwartym z możliwych przypadków, mianowicie gdy poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik – fałszywy, implikacja jest fałszywa. Wynika z tego, że jeśli przyjmujemy implikację za prawdziwą, zakładając równocześnie, że poprzednik jest prawdziwy, to musimy uznać, że następnik jest też prawdziwy; jeśli natomiast przyjmujemy implikację za prawdziwą, odrzucamy jednak następnik jako fałszywy, to musimy również odrzucić poprzednik.

* * *

*Podobnie jak w przypadku alternatywy, dostrzegamy znaczne różnice między stosowaniem implikacji w języku potocznym i w logice. W języku codziennym mamy skłonność do łączenia dwóch zdań słowami „*jeśli ... , to ...*” tylko wtedy, gdy zachodzą pewne związki między ich formą i treścią. Związki te trudno byłoby nam ogólnie scharakteryzować, bowiem tylko czasami ich natura staje się stosunkowo jasna. Na przykład rozważając implikację, często się spodziewamy, że następnik będzie wynikał z poprzednika, a więc jeśli w pewnych okolicznościach poprzednik jest prawdą, to oczekujemy, że

również następnik w tych samych okolicznościach będzie prawdą (i że następnik da się wydedukować z poprzednika na podstawie pewnych praw ogólnych, które nie zawsze będziemy w stanie przytoczyć dosłownie). I tutaj, jak poprzednio, ujawnia się dodatkowy czynnik psychologiczny: zwykle formułujemy i konstatujemy implikację, gdy nie mamy dokładnej wiedzy odnośnie prawdziwości poprzednika i następnika. W przeciwnym razie użycie implikacji wydaje się nie-naturalne i budzi wątpliwości co do jej sensowności i prawdziwości.

Za ilustrację niech nam posłuży następujący przykład. Rozważmy prawo fizyki:

każdy metal jest ciągliwy,

i sformułujmy je w formie implikacji zawierającej zmienne:

jeśli x jest metalem, to x jest ciągliwy.

Jeżeli wierzymy w prawdziwość tego ogólnego prawa, musimy także wierzyć w prawdziwość wszystkich jego szczególnych przypadków, czyli wszystkich implikacji, które otrzymamy, zastępując „ x ” nazwami dowolnych materiałów takich, jak np. żelazo, glina, czy drewno. I rzeczywiście, okazuje się, że wszystkie zdania otrzymane w ten sposób spełniają wymienione wyżej warunki prawdziwości implikacji; innymi słowy, nigdy nie zdarza się, by poprzednik był prawdą, a następnik – fałszem. Co więcej, w każdej z tych implikacji występuje ścisły związek między poprzednikiem a następnikiem polegający na tym, że oba zdania składowe odnoszą się do tego samego przedmiotu. Widzimy ponadto, że przyjmując poprzednik takiej implikacji za prawdziwy, możemy wydedukować następnik (na przykład z tego, że „*żelazo jest metalem*” możemy wywnioskować, że „*żelazo jest ciągliwe*”), opierając się na prawie ogólnym głoszącym, że każdy metal jest ciągliwy.

Wszelako niektóre z rozważanych tu zdań wydają się sztuczne i wątpliwe z punktu widzenia powszechnych przyzwyczajęń językowych. Nikt by się nie wahał przed zastosowaniem podanego wyżej prawa ogólnego, czy użyciem któregośkolwiek z jego szczególnych przypadków otrzymanych przez zastąpienie „ x ” nazwą materiału, póki nie wiedziałby, czy materiał ten jest metalem, albo czy jest ciągliwy. Zastępując jednak „ x ” przez „*żelazo*”, otrzymujemy przypadek, w którym poprzednik i następnik są bez wątpienia prawdą, a ponieważ implikacja taka robi wrażenie sztucznej, użyjemy raczej wyrażenia:

ponieważ żelazo jest metalem, jest ciągliwe.

Podobnie, podstawiając za „ x ” – słowo „*głina*”, dostajemy implikację z fałszywym poprzednikiem i prawdziwym następnikiem, którą wolimy zastąpić wyrażeniem:

głina, choć nie jest metalem, jest ciagliwa.

I wreszcie, zastępując „ x ” przez „*drewno*” otrzymujemy implikację z fałszywym poprzednikiem i fałszywym następnikiem; aby w tym przypadku zachować strukturę implikacji, musimy zmienić formę gramatyczną czasowników:

gdyby drewno było metalem, byłoby ciagliwe.

* * *

Mając na uwadze potrzeby języków naukowych, logicy ze zwrotem „*jeśli ... , to ...*” postąpili tak samo, jak ze słowem „*lub*”. Postanowili uprościć i wyjaśnić jego znaczenie oraz uwolnić je od ubocznych czynników. W tym celu rozszerzyli jego zastosowanie, uznając implikację za zdanie mające sens nawet wtedy, gdy nie zachodzi żaden związek między treścią jej członów, zaś prawdziwość lub fałszywość implikacji uzależnili wyłącznie od prawdziwości lub fałszywości poprzednika i następnika. Charakteryzując krótko tę sytuację, można powiedzieć, że współczesna logika posługuje się IMPLIKACJAMI W ZNACZENIU MATERIALNYM, czy prościej IMPLIKACJAMI MATERIALNYMI – w odróżnieniu od IMPLIKACJI W ZNACZENIU FORMALNYM czy też IMPLIKACJI FORMALNEJ, w której obecność pewnych formalnych związków między poprzednikiem a następnikiem jest warunkiem koniecznym jej poprawności i prawdziwości. Pojęcie implikacji formalnej może zostało jeszcze nie całkiem wyjaśnione, ale w każdym razie jest węższe od pojęcia implikacji materialnej; każda poprawna i prawdziwa implikacja formalna jest równocześnie poprawną i prawdziwą implikacją materialną, ale nie vice versa.

Dla zilustrowania powyższych uwag rozważmy następujące cztery zdania:

jeśli $2 \cdot 2 = 4$, to Nowy Jork jest dużym miastem;
jeśli $2 \cdot 2 = 5$, to Nowy Jork jest dużym miastem;
jeśli $2 \cdot 2 = 4$, to Nowy Jork jest małym miastem;
jeśli $2 \cdot 2 = 5$, to Nowy Jork jest małym miastem.

W języku codziennym z trudem uznalibyśmy je za sensowne, a co dopiero prawdziwe. Natomiast z punktu widzenia logiki matematycznej są one sensowne i – poza trzecim – prawdziwe. Oczywiście, nie chcemy przez to powiedzieć, że takie zdania są jakoś szczególnie ważne, ani że zamierzamy posługiwać się nimi jako przesłankami w naszych dyskusjach.

* * *

Byłoby błędem sądzić, że pokazana tutaj różnica między językiem codziennym a językiem logiki jest ustalona i skończona, oraz że opisane wyżej zwyczaje związane ze stosowaniem zwrotu „*jeśli ... , to ...*” w języku codziennym nie dopuszczają żadnych wyjątków. Przeciwnie, wystarczy się trochę rozejrzeć, by znaleźć przykłady stosowania tego zwrotu w sposób nie całkiem zgodny z implikacją formalną. Wyobraźmy sobie na przykład, że nasz znajomy stoi wobec trudnego zadania, my zaś nie wierzymy, że kiedykolwiek się z nim upora. Ten brak wiary możemy wyrazić żartobliwie, mówiąc:

jeśli rozwiążesz to zadanie, to mi kaktus na dłoni wyrośnie.

Sens tego oświadczenia jest zupełnie jasny. Mamy tu implikację, której następnik jest niewątpliwie fałszywy, a ponieważ przypisujemy prawdziwość całej implikacji, to tym samym odrzucamy prawdziwość poprzednika, czyli wyrażamy przekonanie, że znajomy nie rozwiąże swego zadania. Ale jest również jasne, że poprzednik i następnik naszej implikacji nie są w żaden sposób z sobą powiązane, wobec czego mamy tu typowy przypadek implikacji materialnej, a nie formalnej.

* * *

Rozbieżność między użyciem zwrotu „*jeśli ... , to ...*” w języku powszednim i w logice matematycznej wywoływała długie a nawet namiętne dyskusje, w których, nawiasem mówiąc, zawodowi logicy brali mały udział.³ (Zaskoczenie natomiast może budzić fakt, że

³Interesującym faktem jest to, że początki tej dyskusji datują się w starożytności. Filozof grecki FILON z MEGARY (w IV w.p.n.e.) prawdopodobnie jako pierwszy w historii logiki opowiadał się za stosowaniem implikacji materialnej, przeciwstawiając się poglądom swego mistrza, DIODOROSA KRONOSA, który proponował, by stosować implikację w węższym znaczeniu, bliższym tego, co tu nazywamy znaczeniem formalnym. Nieco później (w III w.p.n.e.) – przypuszczalnie właśnie pod wpływem FILONA – filozofowie greccy i logicy ze szkoły stoików (których prace zawierały pierwsze rozważania o rachunku zdaniowym) uczynili przedmiotem swych badań rozmaite możliwe koncepcje implikacji.

mniejszą uwagę zwracano na analogiczną rozbieżność w przypadku słowa „lub”). Zarzucano logikom, że wskutek posługiwania się pojęciem implikacji materialnej dochodzili do paradoksów, a nawet zgola nonsensów. Żądano reformy logiki, w szczególności zaś, zbliżenia logiki do języka potocznego w zakresie stosowania implikacji.

Trudno uznać zasadność tych krytyk. W języku potocznym nie ma wyrażeń o ściśle określonym znaczeniu. Z wielkim trudem dałoby się znaleźć dwóch ludzi, używających wszystkich słów dokładnie w tym samym znaczeniu, nie mówiąc o tym, że w języku jednej osoby dane słowo może znaczyć co innego w różnych okresach jej życia. Ponadto, znaczenie słów w języku codziennym jest dość skomplikowane; zależy nie tylko od zewnętrznej formy słowa, lecz również od okoliczności, w których jest wypowiedzane, a czasem od subiektywnych czynników psychologicznych. Jeśli więc naukowiec chce przenieść do nauki pojęcie z życia codziennego i ustalić związane z nim prawa ogólne, to pierwszym jego (czy jej) zadaniem będzie zawsze zbadanie, uściślenie i uproszczenie treści tego pojęcia oraz uwolnienie go od nieistotnych atrybutów. Nie ma tu znaczenia, czy osobą tą jest logik rozważający wyrażenie „*jeśli ... , to ...*”, czy na przykład fizyk pragnący ustalić dokładne znaczenie słowa „*metal*”. Bez względu na to, w jaki sposób naukowiec rozwiąże to zadanie, ostateczne użycie przyjętego terminu będzie się różnić, mniej lub więcej, od praktyki języka codziennego. Gdy jednak ustali on dokładnie, w jakim sensie zamierza używać tego terminu, a potem zawsze będzie się tego konsekwentnie trzymał, to nikt nie będzie miał prawa zarzucać mu, że jego postępowanie prowadzi do nonsensownych wyników.

Wszelako w związku z dyskusjami, które miały miejsce, niektórzy logicy próbowali zreformować teorię implikacji. Nie odmawiając generalnie miejsca w logice implikacji materialnej, jednocześnie usiłują znaleźć miejsce dla innego pojęcia implikacji, takiego na przykład, żeby w przypadku prawdziwej implikacji dawało się wydedukować następnik z poprzednika; życzą sobie chyba umieścić to nowe pojęcie nawet na pierwszym planie. Usiłowania te są dosyć świeże i jest jeszcze zbyt wcześnie, by wydawać ostateczną ocenę co do ich wartości.⁴ Dziś jednak *wyduje się rzeczą pewną, że teoria implikacji materialnej pod względem prostoty weźmie górę nad innymi teoriami; w każdym razie nie wolno nam zapomnieć, że logika, która powstała na gruncie tego prostego pojęcia, okazała się zadowalającą podstawą do najbardziej skomplikowanych i subtelnych rozumowań.**

⁴Pierwszej próby opracowania systematycznej teorii implikacji formalnej dokonał filozof i logik amerykański C. I. LEWIS (1883–1964).

§9 Użycie implikacji w matematyce

Sformułowanie „*jeśli ... to ...*” należy do tych wyrażeń logicznych, które są najbardziej rozpowszechnione w innych naukach, szczególnie w matematyce. Prawa matematyczne, zwłaszcza o charakterze ogólnym, mają często postać implikacji; poprzednik w matematyce nazywany jest ZAŁOŻENIEM, następnik zaś – TEZĄ.

Jako prosty przykład prawa arytmetyki o postaci implikacji możemy przytoczyć następujące zdanie[†]:

jeśli x jest liczbą dodatnią, to $2x$ jest liczbą dodatnią

w którym „ *x jest liczbą dodatnią*” stanowi założenie, tezę zaś – „ *$2x$ jest liczbą dodatnią*”.

Obok tej klasycznej niejako postaci praw matematycznych napotykamy niekiedy także inne sformułowania, w których założenie i teza połączone są inaczej, bez pomocy zwrotu „*jeśli ..., to ...*”. Na przykład przytoczone przed chwilą prawo można sformułować w jeden z następujących sposobów:

z tego, że x jest liczbą dodatnią, wynika, że $2x$ jest liczbą dodatnią;

założenie, że x jest liczbą dodatnią, pociąga za sobą tezę (lub, prowadzi do tezy), że $2x$ jest liczbą dodatnią;

warunkiem wystarczającym na to, by $2x$ było liczbą dodatnią, jest, że x jest liczbą dodatnią;

na to, by $2x$ było liczbą dodatnią, wystarczy, by x było liczbą dodatnią;

warunkiem koniecznym na to, by $2x$ było liczbą dodatnią, jest, że x jest liczbą dodatnią;

na to, by x było liczbą dodatnią, potrzeba, by $2x$ było liczbą dodatnią;

[†]Ścisłe mówiąc, następujące wyrażenie jest raczej funkcją zdaniową niż zdaniem. Przypominamy, że termin „*prawo*” pierwotnie wprowadzono dla zdań udowodnionych, ale swobodnie można go rozszerzyć na udowodnione funkcje zdaniowe. (Zauważmy, że gdybyśmy dołączyli kwantyfikator ogólny do tej czy jakiejkolwiek innej funkcji zdaniowej, nie otrzymalibyśmy implikacji w ścisłym znaczeniu.)

Zamiast więc sięgać po zdanie warunkowe, możemy równie dobrze powiedzieć, że założenie *POCIĄGA ZA SOBĄ* tezę lub że jest *WARUNKIEM WYSTARCZAJĄCYM* dla tezy; to samo wyrazimy też mówiąc, że teza *WYNIKA* z założenia, lub że jest *WARUNKIEM KONIECZNYM* dla założenia. Logicy mogliby zaprotestować przeciw niektórym z powyższych sformułowań, w matematyce jednak pozostają one w powszechnym użyciu.

* * *

*Zastrzeżenia mogą tu budzić te z powyższych stwierdzeń, w których występują słowa „założenie”, „teza”, „warunek”, „wynika”, „pociąga za sobą”.

By zrozumieć, na czym zasadniczo polegają te zastrzeżenia, zwróćmy uwagę przede wszystkim na fakt, że ściśle rzecz biorąc sformułowania te różnią się treścią od wyrażen wyjściowych. O ile w „klasycznej postaci” praw mówimy o liczbach, właściwościach liczb, działaniach na liczbach itd., słowem, o obiektach będących przedmiotem matematyki, to w rozważanych wyżej sformułowaniach mówimy o założeniach, tezach, warunkach, czyli o zdaniach lub funkcjach zdaniowych występujących w matematyce. Przy tej okazji można zauważyć, że na ogół ludzie nie odróżniają terminów będących nazwami przedmiotów badań danej nauki – od terminów, które oznaczają różne rodzaje wyrażen występujących w tej nauce. Obserwuje się to najbardziej w matematyce, zwłaszcza na poziomie elementarnym. Chyba stosunkowo niewiele osób zdaje sobie sprawę z tego, że terminy takie jak „równanie”, „nierówność”, „wielomian”, „ułamek algebraiczny”, z którymi ciągle stykamy się w podręcznikach elementarnej algebry, nie należą ściśle do matematyki czy logiki, ponieważ nie oznaczają przedmiotów rozważanych w tych naukach; równania i nierówności są pewnymi specjalnymi funkcjami zdaniowymi, natomiast wielomiany i ułamki algebraiczne – zwłaszcza tak jak się je traktuje w elementarnych podręcznikach – stanowią szczególne przypadki funkcji nazwowych (por. § 2). Zamęt pogłębia tutaj fakt, że terminów tego rodzaju używa się często w sformułowaniach praw matematycznych. Stało się to już powszechną praktyką, ale ponieważ postępowanie takie nie przedstawia szczególnego niebezpieczeństwa, szkoda może naszego czasu na protesty. Wszelako dobrze jest wiedzieć, że dla wielu praw sformułowanych za pomocą takich terminów, istnieją inne sformułowania, bardziej odpowiednie z punktu widzenia logiki, w których terminy te wcale nie występują. Na przykład prawo:

równanie $x^2 + ax + b = 0$ ma co najwyżej dwa pierwiastki właściwiej byłoby wyrazić w następujący sposób:

istnieją co najwyżej dwie liczby x takie, że $x^2 + ax + b = 0$.

* * *

Sięgnijmy jeszcze raz do kontrowersyjnych sformułowań implikacji, by zwrócić uwagę na kolejny, szczególnie ważny, aspekt. W sformułowaniach tych utrzymujemy, że dla jednego zdania, mianowicie poprzednika implikacji, drugie – następnik implikacji – jest tezą, czyli, że drugie zdanie wynika z pierwszego. Zwykle wyrażając się w ten sposób, mamy na myśli, że założenie o prawdziwości pierwszego zdania jak gdyby wymaga od nas tego samego założenia odnośnie drugiego zdania (a nawet byśmy byli w stanie wyprowadzić drugie zdanie z pierwszego). Ale jak wiemy już z § 8, we współczesnej logice sensowność implikacji nie zależy od tego, czy następnik pozostaje w związku formalnym z poprzednikiem. Spójrzmy jeszcze raz na podane tam przykłady. Każdemu, kogo zaskoczył fakt, że w logice zdanie:

jeśli $2 \cdot 2 = 4$, to Nowy Jork jest dużym miastem

jest uważane za zdanie mające sens, a nawet prawdziwe, będzie jeszcze trudniej pogodzić się z przekształceniem tego zdania:

z założenia, że $2 \cdot 2 = 4$ wynika teza, że Nowy Jork jest dużym miastem.

Widzimy, że inne sposoby formułowania czy przekształcania zdań warunkowych prowadzą do wyrażen brzmiących paradoksalnie, co zwiększa rozbieżność między językiem powszechnym a językiem logiki matematycznej. Nie dziwi więc, że takie przekształcenia prowadziły raz po raz do rozmaitych nieporozumień, będąc jedną z przyczyn owych namiętnych i często bezpłodnych dyskusji, o których wspomnieliśmy wcześniej.

* * *

Z czysto logicznego punktu widzenia, możemy oczywiście uniknąć wszystkich zgłaszanych tutaj zastrzeżeń, oświadczając, że nie zamierzamy brać pod uwagę dosłownego znaczenia kwestionowanych sformułowań, będziemy natomiast przypisywać im tę samą treść, co zwykłym zdaniom warunkowym. Ale byłoby to niewygodne pod innym

względem; istnieją bowiem sytuacje – nie w samej logice, lecz w nauce ściśle z nią powiązanej, mianowicie, w metodologii nauk dedukcyjnych (por. rozdział VI) – kiedy to mówimy o zdaniach i relacjach wynikania między nimi, w których słów takich, jak „wynika” i „pociąga za sobą” używa się w innym, bardziej zbliżonym do zwykłego, znaczeniu. Byłoby więc lepiej unikać całkiem takich sformułowań, zwłaszcza, że dysponujemy innymi, które nie budzą żadnych zastrzeżeń.*

§10 Równoważność zdań

Rozważymy jeszcze jeden spójnik zdaniowy. Jest nim wyrażenie rzadko spotykane w języku codziennym, mianowicie zwrot „*wtedy i tylko wtedy, gdy*”. Łącząc nim dowolne dwa zdania, otrzymujemy zdanie złożone, które nosi nazwę RÓWNOWAŻNOŚCI. Zdania tak połączone noszą miano LEWEJ i PRAWEJ STRONY RÓWNOWAŻNOŚCI. Stwierdzając równoważność dwóch zdań wykluczamy możliwość, że jedno z nich jest prawdziwe, drugie zaś fałszywe. Równoważność jest więc prawdziwa, gdy lewa i prawa strona są jednocześnie bądź prawdziwe, bądź fałszywe, w przeciwnym przypadku równoważność jest fałszywa.

Sens równoważności możemy oddać jeszcze w inny sposób. Jeśli w zdaniu warunkowym zamienimy miejscami poprzednik z następnikiem, to otrzymamy nowe zdanie nazywane ODWROTNOŚCIĄ DANEGO ZDANIA lub ZDANIEM ODWROTNYM. Weźmy, na przykład, jako dane zdanie następującą implikację:

(I) *jeśli x jest liczbą dodatnią, to $2x$ jest liczbą dodatnią;*

odwrotnością tego zdania będzie:

(II) *jeśli $2x$ jest liczbą dodatnią, to x jest liczbą dodatnią.*

Jak widać z tego przykładu, odwrotność zdania prawdziwego bywa też prawdziwa. Nie jest to jednak ogólna zasada, o czym możemy się przekonać, zastępując w zdaniach (I) i (II) „ $2x$ ” przez „ x^2 ”. Zdanie (I) pozostanie prawdziwe, natomiast zdanie (II) stanie się fałszywe. W przypadku, gdy prawdziwe jest zarówno dane zdanie warunkowe,

jak jego odwrotność, równoczesną prawdziwość obu zdań wyrażamy w ten sposób, że poprzednik któregośkolwiek z nich łączymy z następnikiem słowami „*wtedy i tylko wtedy, gdy*”. Tak więc powyższe dwie implikacje – zdanie wyjściowe (I) i jego odwrotność (II) – możemy zastąpić jednym zdaniem:

x jest liczbą dodatnią wtedy i tylko wtedy, gdy $2x$ jest liczbą dodatnią

(przy czym obie strony równoważności można zamienić miejscami).

Znamy zresztą kilka innych sposobów sformułowania tej samej myśli, np.:

z tego, że x jest liczbą dodatnią wynika, że $2x$ jest liczbą dodatnią i na odwrót;

warunki, że x jest liczbą dodatnią i $2x$ jest liczbą dodatnią, są wzajemnie równoważne;

warunek, że x jest liczbą dodatnią, jest zarówno konieczny jak wystarczający na to, by $2x$ było liczbą dodatnią;

warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by x było liczbą dodatnią jest, że $2x$ jest liczbą dodatnią.

Zamiast więc łączyć dwa zdania zwrotem „*wtedy i tylko wtedy, gdy*” możemy powiedzieć, że między tymi dwoma zdaniami ZACHODZI RELACJA WYNIKANIA W OBU KIERUNKACH, że są one RÓWNOWAŻNE, lub wreszcie, że każde z tych dwóch zdań stanowi WARUNEK KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY dla drugiego.

§11 Zasady formułowania definicji

Zwrotu „*wtedy i tylko wtedy, gdy*” używamy bardzo często przy formułowaniu DEFINICJI, czyli umów ustanawiających, jaki sens przypisujemy wyrażeniu, które dotąd w danej dyscyplinie naukowej nie występowało i wobec czego może być niezrozumiałe. Wyobraźmy sobie na przykład, że nie używaliśmy dotąd w arytmetyce symbolu „ $\leq$ ”, a teraz pragniemy wprowadzić go do rozważań (traktując go, jak zwykle, jako skrót wyrażenia „*jest mniejszy lub równy*” lub wyrażenia „*jest nie większy niż*”). W tym celu powinniśmy symbol ten wpierw zdefiniować, tzn. dokładnie wyjaśnić jego znaczenie za pomocą wyrazów już nam znanych, których sens nie budzi żadnych wątpliwości.

Zakładając, że do tych znanych już wyrazów należy m. in. znak „>”, formułujemy następującą definicję:

mówimy, że $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi, że $x > y$.

Definicja ta ustala równoważność dwóch funkcji zdaniowych:

$$x \leq y$$

oraz

$$\text{nie zachodzi, że } x > y;$$

możemy więc powiedzieć, że pozwala ona przekształcać wzór „ $x \leq y$ ” w równoważne mu wyrażenie, nie zawierające symbolu „ $\leq$ ” i sformułowane wyłącznie za pomocą zrozumiałych dla nas wyrazów. To samo dotyczy każdego wzoru, który otrzymujemy z „ $x \leq y$ ” podstawiając za „ x ” i „ y ” dowolne symbole lub wyrażenia liczbowe. Na przykład wzór:

$$3 + 2 \leq 5$$

jest równoważny zdaniu:

$$\text{nie zachodzi, że } 3 + 2 > 5;$$

a ponieważ drugie zdanie jest prawdziwe, to i pierwsze wyraża myśl prawdziwą. Podobnie wzór:

$$4 \leq 2 + 1$$

równoważny jest zdaniu:

$$\text{nie zachodzi, że } 4 > 2 + 1,$$

i oba są fałszywe. Powyższe spostrzeżenie odnosi się również do bardziej złożonych zdań (i funkcji zdaniowych). Przekształcając, na przykład, zdanie:

$$\text{jeśli } x \leq y \text{ i } y \leq z, \text{ to } x \leq z,$$

otrzymujemy:

$$\text{jeśli nie zachodzi, że } x > y \text{ i nie zachodzi, że } y > z, \text{ to nie zachodzi, że } x > z.$$

Krótko mówiąc, dzięki podanej definicji potrafimy dowolne zdanie proste lub złożone, w którym występuje znak „ $\leq$ ” przekształcić w zdanie równoważne, nie zawierające tego symbolu[†] lub, inaczej mówiąc, przełożyć na język, w którym symbol „ $\leq$ ” nie występuje. Na tym polega rola definicji w naukach matematycznych.

[†]Oczywiście równoważność pozwala też na postępowanie odwrotne: użycie symbolu „ $\leq$ ” w celu przekształcania pewnych wyrażeń w wyrażenia krótsze.

* * *

Aby definicja spełniała należycie swe zadanie, powinniśmy przy jej budowie zachowywać pewne środki ostrożności. Dlatego właśnie ustalono specjalne reguły, tzw. REGUŁY DEFINIOWANIA, które pouczają, jak poprawnie konstruować definicje. Rezygnując tu z dokładnego formułowania tych reguł, zaznaczymy tylko, że zgodnie z regułami definiowania, każda definicja może mieć postać równoważności; lewa strona równoważności, zwana DEFINIENDUM, powinna być krótką, gramatycznie prostą funkcją zdaniową, zawierającą w sobie ten wyraz stały, który definiujemy; prawa strona, tzw. DEFINIENS, może być funkcją zdaniową o dowolnej strukturze, zawierającą wszakże tylko te wyrazy stałe, których sens bądź bezpośrednio jest dla nas zrozumiały, bądź został już uprzednio wyjaśniony. Nie wolno zwłaszcza, by definiowany wyraz stały, czy którekolwiek wyrażenie wcześniej definiowane z jego pomocą, wystąpiło w definiensie; w przeciwnym razie definicja jest nieprawidłowa, ponieważ zawiera błąd znany jako BŁĘDNE KOŁO W DEFINIOWANIU (tak jak się mówi o BŁĘDNYM KOŁE W ROZUMOWANIU, kiedy argument, który ma ustalić pewne zdanie, sam jest oparty na tym lub jakimś innym zdaniu, wcześniej zeń wydedukowanym). Wreszcie, by uwydatnić umowny charakter definicji i odróżnić ją od praw mających postać równoważności, poprzedza się ją zwrotem w rodzaju: „*mówimy, że*”. – Łatwo sprawdzić, że podana wyżej definicja symbolu „ $\leq$ ” spełnia wszystkie z tych warunków; jako definiendum figuruje w niej:

$$x \leq y$$

jako definiens zaś:

$$\text{nie zachodzi, że } x > y.$$

Warto też zauważyć, że matematycy przy formułowaniu definicji zamiast wyrażenia „*wtedy i tylko wtedy, gdy*” chętnie używają słowa „*jeśli*” lub „*o ile*”; znak „ $\leq$ ” zdefiniowałiby zapewne następująco:

$$\text{mówimy, że } x \leq y, \text{ o ile nie zachodzi, że } x > y.$$

Na pozór definicja taka stwierdza tylko tyle, że definiendum wynika z definiens, nie uwydatnia zaś wynikania w kierunku odwrotnym, nie ustala zatem, że definiendum i definiens są sobie równoważne. W grę wchodzi tu jednak milcząca umowa, zgodnie z którą słowa „*jeśli*” i

„o ile”, łączące definiendum i definiens, znaczą tyle, co zwrot „*wtedy i tylko wtedy, gdy*”. – Dodajmy, że postać równoważności nie jest jedyną postacią definicji.

§12 Prawa rachunku zdaniowego

Omówiwszy najważniejsze spójniki zdaniowe, możemy przystąpić do wyjaśnienia charakteru praw rachunku zdaniowego.

Rozważmy następujące zdanie:

jeśli 1 jest liczbą dodatnią i $1 < 2$, to 1 jest liczbą dodatnią.

Zdanie to jest niewątpliwie prawdziwe, występują w nim wyłącznie wyrazy stałe z zakresu logiki i arytmetyki, mimo to nikomu nie przyjdzie do głowy, żeby zamieścić je jako odrębne prawo w podręczniku matematyki. Gdy zastanowimy się, czemu to przypisać, dojdziemy do wniosku, że zdanie to jest zupełnie nieciekawe z punktu widzenia arytmetyki. Nie wzbogaca ono naszej wiedzy o liczbach, prawdziwość jego nie zależy wcale od treści zawartych w nim pojęć arytmetycznych, a jedynie od sensu słów „i”, „*jeśli*”, „to”. Aby się o tym przekonać, zastąpmy w omawianym zdaniu zwroty:

1 jest liczbą dodatnią

oraz

$$1 < 2$$

przez jakiekolwiek inne dwa zdania z dowolnego zakresu. Otrzymamy szereg zdań, tak samo prawdziwych, jak zdanie oryginalne, np.:

jeśli dana figura jest rombem i ta sama figura jest prostokątem, to dana figura jest rombem;

jeśli dziś jest niedziela i świeci słońce, to dziś jest niedziela.

Aby wyrazić prawdziwość tych zdań w ogólnej postaci, wprowadźmy symbole zmienne „*p*” i „*q*” i umówmy się, że symbole te nie reprezentują liczb lub innych przedmiotów, lecz całe zdania; symbole zmienne tego rodzaju nazywamy ZMIENNYMI ZDANIOWYMI. Zastępując w rozważanym zdaniu wyrażenie:

1 jest liczbą dodatnią

przez p , zaś:

$$1 < 2$$

przez „ q ”, otrzymamy funkcję zdaniową:

$$\text{jeśli } p \text{ i } q, \text{ to } p.$$

Ma ona tę własność, że podstawiając w niej za „ p ” i „ q ” dowolne zdania, zawsze uzyskamy zdania prawdziwe. Spostrzeżenie nasze daje się ująć w formę następującego prawa:

$$\text{dla dowolnych } p \text{ i } q, \text{ jeśli } p \text{ i } q, \text{ to } p.$$

Otrzymaliśmy tutaj nasz pierwszy przykład prawa rachunku zdaniowego, zwanego PRAWEM SYMPLIFIKACJI DLA MNOŻENIA LOGICZNEGO. Zdanie, które pierwotnie rozpatrywaliśmy, jest tylko szczególnym przypadkiem tego ogólnego prawa, podobnie jak wzór:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

jest szczególnym przypadkiem ogólnego prawa arytmetyki:

$$\text{dla dowolnych liczb } x \text{ i } y, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

W analogiczny sposób można dojść do innych praw rachunku zdań. Podamy tutaj kilka ich przykładów; formułując je, ominiemy jednak kwantyfikator ogólny „dla dowolnego $p, q \dots$ ” – zgodnie ze zwyczajem wspomnianym w § 3, który w rachunku zdań stał się niemal regułą.

Jeśli p , to p .

Jeśli p , to q lub p .

Jeśli z tego, że p , wynika, że q , i z tego, że q wynika, że p , to p wtedy i tylko wtedy, gdy q .

Jeśli z tego, że p , wynika, że q i z tego, że q wynika, że r , to z tego, że p wynika, że r .

Pierwsze z tych praw nosi nazwę PRAWA TOŻSAMOŚCI, drugie nazywa się PRAWEM DODAWANIA LOGICZNEGO, czwarte – PRAWEM SYLOGIZMU HIPOTETYCZNEGO.^{† ††}

[†]Czytelnik zauważył zapewne szersze odstępstwa w podanych wyżej „wzorach słownych”. Tutaj szersze odstępstwa spełniają tę samą rolę co nawiasy w równaniach.

^{††}Prawo dodawania logicznego nazywa się też krótko PRAWEM DODAWANIA. Funkcjonuje jeszcze inna nazwa tego prawa, mianowicie PRAWO SYMPLIFIKACJI

Podobnie jak prawa arytmetyki o charakterze ogólnym wyrażają własności dowolnych liczb, tak prawa rachunku zdań orzekają jakby o własnościach dowolnych zdań. W prawach tych występuje tylko jeden rodzaj zmiennych, mianowicie zmienne zastępujące zdania; okoliczność ta stanowi cechę charakterystyczną rachunku zdań i decyduje o jego wielkiej ogólności i szerokim zastosowaniu.

§13 Symbolika rachunku zdań; funkcje zdaniowe złożone oraz tabelki prawdziwościowe

Prosta i ogólna metoda, umożliwiająca określenie, czy dane zdanie z dziedziny rachunku zdań jest prawdziwe i czy wobec tego może być traktowane jako prawo tego rachunku, nosi nazwę METODY TABELEK PRAWDZIWOŚCIOWYCH lub METODY MATRYC.⁵

Przy opisywaniu tej metody wygodnie jest posługiwać się specjalnymi symbolami. Spójniki zdaniowe:

nie; i; lub; jeśli ..., to ...; wtedy i tylko wtedy, gdy

zastąpimy odpowiednio następującymi symbolami:

$\sim$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Pierwszy z symboli umieszczamy przed wyrażeniem, negację którego chcemy otrzymać; pozostałe stawiamy zawsze między dwoma wyrażeniami (słowo „to” zastępujemy „ $\rightarrow$ ”, natomiast wyraz „*jeśli*” po prostu pomijamy). W ten sposób z jednego lub dwóch prostszych wyrażenń wyprowadzamy wyrażenie bardziej złożone, które po ujęciu w nawiasy może służyć do utworzenia innego, jeszcze bardziej złożonego, wyrażenia.

Za pomocą wymienionych wyżej zmiennych, nawiasów oraz stałych (czasem również za pomocą innych stałych, które tutaj pominiemy) jesteśmy w stanie zapisać wszystkie funkcje zdaniowe oraz

DLA DODAWANIA LOGICZNEGO. Druga nazwa wynika z pewnej analogii między tym prawem a podanym wyżej prawem symplifikacji dla mnożenia logicznego. Analogię tę widać w bardziej zaawansowanych rozważaniach (por. np. *Ćwiczenia dodatkowe* w rozdziale VI), tu jednak nazwa ta wydaje się wprowadzać w błąd: jeśli bowiem przyjmujemy, że p i konkludujemy, że q *lub* p , to wygląda, jakbyśmy komplikowali sprawę zamiast je upraszczać.

⁵Metodę tę wprowadził PEIRCE (cytowany wcześniej; por. ods. 2 str. 14).

wszystkie zdania z dziedziny rachunku zdań. Poza zmiennymi zdaniowymi przykładami najprostszych funkcji zdaniowych są:

$$\sim p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \rightarrow q, \quad p \leftrightarrow q$$

(i inne podobne wyrażenia, różniące się od podanych wyżej jedynie kształtem użytych zmiennych). Przykładem nieco bardziej złożonej funkcji zdaniowej jest wyrażenie:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r),$$

które czytamy jako:

$$\textit{jeśli } p \text{ lub } q, \text{ to } p \text{ i } r.$$

Jeszcze bardziej złożonym wyrażeniem jest podane wcześniej prawo sylogizmu hipotetycznego, które przyjmuje postać:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

* * *

Możemy się łatwo przekonać, że każda zbudowana w taki sposób funkcja zdaniowa jest tzw. FUNKCJĄ PRAWDZIWOŚCIOWĄ. Oznacza to, że prawdziwość lub fałszywość zdania otrzymanego przez zastąpienie zmiennych całymi zdaniami zależy wyłącznie od prawdziwości lub fałszywości tych zdań.[†] Prawdziwość lub fałszywość najprostszych funkcji zdaniowych, jak np. „ $\sim p$ ” i „ $p \wedge q$ ”, wynika z uwag zamieszczonych w §§ 7, 8 oraz 10 odnośnie znaczenia, jakie w logice nadaje się słowom „*nie*”, „*i*” i tym podobnym. To samo odnosi się do dłuższych funkcji złożonych. Rozważmy na przykład wspomnianą wyżej funkcję „ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ”. Otrzymane przez podstawienie zdanie jest implikacją, wobec czego jego prawdziwość zależy wyłącznie od prawdziwości lub fałszywości poprzednika i następnika, przy czym obie te możliwości – prawdziwość i fałszywość – noszą wspólne miano WARTOŚCI LOGICZNEJ. Z kolei wartość logiczna poprzednika, będącego alternatywą „ $p \vee q$ ”, zależy jedynie od wartości logicznej

[†]Funkcja prawdziwościowa jest więc analogiczna do tego, co nazywamy FUNKCJĄ LICZBOWĄ, to znaczy – do funkcji nazwowej, która reprezentuje nazwę liczby, zależącą wyłącznie od stałych liczbowych, wstawionych w miejsce zmiennych. Termin „*funkcja prawdziwościowa*” nie występuje jednak w powszechnym użyciu i w praktyce o wzorach typu „ $p \rightarrow (p \wedge q)$ ” mówi się „*złożona funkcja zdaniowa*”, lub „*wyrażenie rachunku zdaniowego*”.

zdań zastąpionych przez „ p ” i „ q ”. Podobnie, wartość logiczna następnika zależy tylko od wartości logicznej zdań zastąpionych przez „ p ” i „ r ”. Ostatecznie więc, wartość logiczna całego zdania otrzymanego z rozważanej tu funkcji zdaniowej zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań zastąpionych przez „ p ”, „ q ” oraz „ r ”.^{††}

Rozważymy teraz zdanie otrzymane przez podstawienie danej funkcji zdaniowej. W celu dokładnego zbadania, jak jego wartość logiczna zależy od wartości logicznej zdań, które zastąpiły zmienne, sporządza się tzw. TABELKĘ PRAWDZIWOŚCIOWĄ lub MATRYCĘ tej funkcji. Pokażemy, jak się to robi, zaczynając od podania tabeli dla funkcji „ $\sim p$ ”:

p	$\sim p$
1	0
0	1

A oto połączona tabelka prawdziwościowa dla innych elementarnych funkcji zdaniowych, mianowicie dla „ $p \wedge q$ ”, „ $p \vee q$ ” i tak dalej:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

Znaczenie tych tabelek staje się jasne, gdy zauważymy, iż symbole „1” i „0” oznaczają, odpowiednio, *zdanie prawdziwe* i *zdanie fałszywe*.[¶] Dla przykładu odszukajmy w drugiej tabelce w drugim wierszu pod nagłówkami – „ p ”, „ q ” i „ $p \rightarrow q$ ” – symbole „0”, „1”, „1”. Interpretujemy to w ten sposób, że zdanie otrzymane z implikacji „ $p \rightarrow q$ ”, jest prawdziwe, gdy „ p ” zastąpimy dowolnym zdaniem fałszywym,

^{††}Zastanówmy się dokładniej nad analogią z liczbami i funkcjami liczbowymi (patrz: poprzedni odsyłacz). W przypadku funkcji liczbowych zaczynamy od zastąpienia zmiennych stałymi liczbowymi, ale zamiast mówić o stałych liczbowych, możemy też odwołać się do liczb i używać określenia „*wartości liczbowe*”. Z wartości tych otrzymujemy wartości liczbowe kolejnych kombinacji, a na końcu – wartość liczbową oryginalnej funkcji. Widzimy więc, że wartości logiczne wyrażenia „ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ” określa się niemal tak samo, jak wartości liczbowe na przykład wyrażenia „ $x^2 + 2x + y$ ”.

[¶]Z tego względu metoda tabel prawdziwościowych jest też nazywana metodą zero-jedynkową.

„ q ” zaś dowolnym zdaniem prawdziwym – co jest oczywiście zgodne z tym, co powiedzieliśmy w § 8. Występujące w tabelkach zmienne „ p ” i „ q ” można, rzecz jasna, zastąpić dwiema dowolnymi różnymi zmiennymi.

Posługując się powyższymi tabelkami, zwanymi PODSTAWOWYMI TABELKAMI PRAWDZIWOŚCIOWYMI, możemy dla dowolnej złożonej funkcji zdaniowej skonstruować POCHODNĄ TABELKĘ PRAWDZIWOŚCIOWĄ. Na przykład tabela dla funkcji „ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ” wygląda następująco:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1

Aby wytłumaczyć konstrukcję tabelki skupmy się, na przykład, na piątym wierszu (pod nagłówkiem). Pod „ p ” i „ q ” podstawmy zdania prawdziwe, a pod „ r ” – fałszywe. Zgodnie z drugą podstawową tabelką, z „ $p \vee q$ ” otrzymujemy zdanie prawdziwe, z „ $p \wedge r$ ” – zdanie fałszywe. Z całej więc funkcji „ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ” otrzymujemy implikację z prawdziwym poprzednikiem i fałszywym następnikiem; odwołując się znowu do drugiej podstawowej tabelki (w której „ p ” i „ q ” traktujemy jako chwilowo zastąpione przez „ $p \vee q$ ” i „ $p \wedge r$ ”) stwierdzamy, że implikacja ta jest zdaniem fałszywym.

Poziome linie tabelki, zawierające symbole „1” i „0”, nazywamy RZĘDAMI, pionowe – KOLUMNAMI. Każdy rząd, czy raczej część rzędu po lewej stronie pionowej kreski, reprezentuje dane podstawienie zmiennych zdaniami prawdziwymi i fałszywymi. Przy konstruowaniu matrycy dla danej funkcji musimy wyczerpać wszystkie sposoby skorelowania kombinacji symboli „1” i „0” ze zmiennymi, przy czym nie wpisujemy, rzecz jasna, do tabeli dwóch rzędów, które są identyczne pod względem liczby i kolejności symboli „1” i „0”. Można łatwo dostrzec, że liczba rzędów w tabelce zależy w prosty sposób od liczby poszczególnych zmiennych występujących w danej funkcji; innymi słowy, jeśli funkcja zawiera 1, 2, 3, ... różne zmienne,

to jej maczyca składa się z $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, ... rzędów. Natomiast liczba kolumn równa jest liczbie składowych funkcji zdaniowych o różnej postaci, zawartych w danej funkcji (gdzie każda zmienna i cała funkcja są też zaliczane do jej funkcji składowych).

* * *

Nauczysz się konstruowania tabelki prawdziwościowych możemy przystąpić do sprawdzania, czy dane zdanie z rachunku zdaniowego jest prawdziwe. Jak wiemy, w rachunku zdaniowym między zdaniami a funkcjami zdaniowymi nie występują zewnętrzne różnice; jedyna różnica wynika ze sposobu interpretacji wyrażeń i przyjętej reguły, że wyrażenia uważane za zdania zawsze dopełniamy w myśli kwantyfikatorem ogólnym. Zgodnie z tym, chcąc określić, czy dane zdanie jest prawdziwe, traktujemy je chwilowo jako funkcję zdaniową i konstruujemy dla niej tabelkę prawdziwościową. Jeśli w ostatniej kolumnie tabelki nie pojawia się symbol „0”, to każde zdanie otrzymane z tej funkcji przez podstawienie będzie prawdziwe, wobec czego nasze pierwotne zdanie ogólne (otrzymane z funkcji zdaniowej przez poprzedzenie jej w myśli kwantyfikatorem ogólnym) jest również prawdziwe. Jeśli jednak ostatnia kolumna tabelki zawiera choćby jeden symbol „0”, nasze zdanie jest fałszywe.

Widzieliśmy np., że w maczyce dla funkcji „ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$ ” symbol „0” w ostatniej kolumnie pojawia się czterokrotnie. Gdybyśmy zatem uważali wyrażenie to za zdanie (innymi słowy, gdybyśmy poprzedzili je słowami „*dla każdego p, q i r* ”), byłoby ono fałszywe. Z drugiej strony, można łatwo sprawdzić za pomocą tabelki prawdziwościowych, że wszystkie prawa rachunku zdaniowego podane w § 12, a więc prawa symplifikacji, tożsamości itd., są zdaniami prawdziwymi. I tak, tabelka dla prawa symplifikacji:

$$(p \wedge q) \rightarrow p,$$

jest następująca:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
1	1	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	1

Podamy tutaj kilka innych ważnych praw rachunku zdaniowego, których prawdziwość możemy potwierdzić postępując analogicznie:

$$\begin{array}{ll}
 \sim(p \wedge \sim p), & p \vee \sim p, \\
 (p \wedge p) \leftrightarrow p, & (p \vee p) \leftrightarrow p, \\
 (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p), & (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p), \\
 [p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r], & [p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r].
 \end{array}$$

Dwa prawa w pierwszej linii nazywamy PRAWEM SPRZECZNOŚCI i PRAWEM WYŁĄCZONEGO ŚRODKA; następnie mamy dwa PRAWA TAUTOLOGII (dla mnożenia logicznego i dodawania logicznego); potem – dwa PRAWA PRZEMIENNOŚCI, a na końcu – dwa PRAWA ŁĄCZNOŚCI. Łatwo się przekonać, jak niejasny byłby sens dwóch ostatnich praw, gdybyśmy spróbowali wyrazić je zwykłym językiem. Ilustruje to dobrze wartość symboliki logicznej jako precyzyjnego narzędzia do wyrażania bardziej skomplikowanych myśli.

* * *

*Okazuje się, że metodą matryc możemy ustanowić prawami pewne zdania, których prawdziwość nie wydaje się oczywista przed sprawdzeniem ich tą metodą. Oto kilka przykładów takich zdań[‡]:

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow (q \rightarrow p), \\
 \sim p \rightarrow (p \rightarrow q), \\
 (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p).
 \end{array}$$

To, że prawa te nie wydają się natychmiast oczywiste, wynika głównie z faktu, że zależą one od charakterystycznej dla nowoczesnej logiki osobliwości implikacji, innymi słowy – od użycia implikacji w znaczeniu materialnym.

Zdania te brzmią szczególnie paradoksalnie, gdy sformułujemy je słowami języka powszechnego, implikacje zaś wyrazimy używając zwrotów „*pociąga za sobą, że*” lub „*wynika, że*”; na przykład w następujący sposób:

jeśli p jest prawdziwe, to p wynika z każdego q (innymi słowy: zdanie prawdziwe wynika z każdego zdania);

[‡]Drugie z nich może służyć za ilustrację konwencji przyjętej dla symbolu „ $\sim$ ” (a nieco inaczej przedstawionej na początku tego paragrafu). Mianowicie, symbol ten neguje najkrótsze wyrażenie następujące bezpośrednio po nim, które tworzy funkcję zdaniową. Drugie zdanie zatem znaczy: „ $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ ”, nie zaś: „ $\sim [p \rightarrow (p \rightarrow q)]$ ”.

jeśli p jest fałszywe, to p pociąga za sobą każde q (innymi słowy: zdanie fałszywe pociąga za sobą każde zdanie);

dla każdego p i q , p pociąga za sobą q , lub q pociąga za sobą p (innymi słowy: przynajmniej jedno z dowolnych dwóch zdań pociąga za sobą drugie).

Tak sformułowane prawa wywołują nieporozumienia i zbędne dyskusje. Mamy tu zatem dodatkowe poparcie dla uwag, które zrobiliśmy przy końcu § 9.*

§14 Stosowanie praw rachunku zdań w dowodach matematycznych

We wszystkich niemal rozumowaniach matematycznych opieramy się – bezpośrednio lub pośrednio – na prawach rachunku zdań. Spróbujemy wyjaśnić to na przykładzie.

Mając zdanie w formie implikacji, można utworzyć dwa inne poza odwrotnością (o której mowa w § 10): ZDANIE PRZECIWNE [w innym sensie tego słowa niż przyjęty w logice tradycyjnej] oraz ZDANIE PRZECIWSTAWNE. Zdanie przeciwne otrzymujemy zastępując poprzednik i następnik ich przeczeniami. Zdanie przeciwstawne jest wynikiem zamiany miejscami poprzednika z następnikiem w zdaniu przeciwnym; zdanie przeciwstawne jest zatem odwrotnością zdania przeciwnego i zarazem zdaniem przeciwnym dla zdania odwrotnego. Zdania: odwrotne, przeciwne i przeciwstawne, razem ze zdaniem wyjściowym nazywamy ZDANIAMI SPRZĘŻONYMI. – Jako ilustrację weźmy następujące zdanie warunkowe:

(I) *jeśli x jest liczbą dodatnią, to $2x$ jest liczbą dodatnią*

i sformułujemy jego trzy zdania sprzężone:

jeśli $2x$ jest liczbą dodatnią, to x jest liczbą dodatnią;

jeśli x nie jest liczbą dodatnią, to $2x$ nie jest liczbą dodatnią;

jeśli $2x$ nie jest liczbą dodatnią, to x nie jest liczbą dodatnią.

W podanym tu przykładzie wszystkie zdania sprzężone otrzymane ze zdania prawdziwego okazały się także prawdziwe. Nie jest to jednak ogólna zasada, fałszywe bowiem może być nie tylko zdanie odwrotne

(jak wspomniano już w § 10), ale również zdanie przeciwne, mimo prawdziwości zdania wyjściowego. Aby się o tym przekonać, wystarczy w powyższych zdaniach „ $2x$ ” zamienić na „ x^2 ”.

Płynie z tego wniosek, że z prawdziwości implikacji nie można sądzić o prawdziwości zdania odwrotnego czy przeciwnego. Zupełnie inaczej jest w przypadku czwartego zdania sprzężonego – za każdym razem, gdy implikacja jest prawdziwa, prawdziwe jest też zdanie przeciwstawne. Fakt ten można potwierdzić licznymi przykładami; znajduje on swój wyraz w ogólnym prawie rachunku zdaniowego, mianowicie w tzw. PRAWIE KONTRAPOZYCJI lub PRAWIE TRANSPOZYCJI.

Aby sformułować powyższe prawo, zauważmy, że dowolnej implikacji możemy nadać schematyczną postać:

jeśli p , to q ;

wtedy zdania: odwrotne, przeciwne i przeciwstawne przyjmą postać analogiczną:

jeśli q , to p ; jeśli nie p , to nie q ; jeśli nie q , to nie p .

Prawo kontrapozycji, zgodnie z którym każde zdanie warunkowe pociąga za sobą odpowiednie zdanie przeciwstawne, da się teraz sformułować następująco:

jeśli: jeśli p , to q , to: jeśli nie q , to nie p .

Wobec nagromadzenia słów „*jeśli*”, lepiej powyższe zdanie nieco zmodyfikować:

(II) *z tego, że: jeśli p , to q , wynika, że: jeśli nie q , to nie p .*

* * *

Gdy wypowiedź ma postać implikacji – jak np. stwierdzenie (I) – możemy w oparciu o podane przed chwilą prawo wyprowadzić z niej zdanie przeciwstawne.

W tym celu zauważmy, że stwierdzenie (II) pozostaje prawdziwe, jeśli za „ p ” i „ q ” podstawimy dowolne zdania lub funkcje zdaniowe, którymi niech tu będą następujące wyrażenia:

x jest liczbą dodatnią

oraz

$2x$ jest liczbą dodatnią.

Zamieniwszy ze względów stylistycznych miejsce wyrazu „nie” otrzymamy:

- (III) *z tego, że: jeśli x jest liczbą dodatnią, to $2x$ jest liczbą dodatnią, wynika, że: jeśli $2x$ nie jest liczbą dodatnią, to x nie jest liczbą dodatnią.*

Porównajmy teraz (I) z (III): (III) ma postać implikacji, w której założeniem jest (I). Skoro uznaliśmy za prawdziwą zarówno implikację, jak jej założenie, to musimy uznać za prawdziwą i tezę; tezą jest właśnie zdanie przeciwstawne, o które nam chodziło:

- (IV) *jeśli $2x$ nie jest liczbą dodatnią, to x nie jest liczbą całkowitą.*

Tak więc w oparciu o znajomość prawa kontrapozycji możemy uznać za prawdziwe zdanie przeciwstawne, o ile oczywiście przeprowadziliśmy wcześniej dowód zdania wyjściowego. Ponadto można łatwo sprawdzić, że zdanie przeciwne jest zdaniem przeciwstawnym dla odwrotności zdania wyjściowego (to znaczy, zdanie przeciwne daje się otrzymać ze zdania odwrotnego przez zastąpienie poprzednika i następnika ich przeczeniami oraz zamianę ich miejscami); jeśli zatem udowodniliśmy odwrotność danego zdania, to możemy uważać również zdanie przeciwne za prawdziwe. Skoro więc udało nam się udowodnić dwa zdania – wyjściowe i odwrotne – odpada potrzeba przeprowadzenia odrębnego dowodu dla pozostałych dwóch zdań sprzężonych.

Warto zaznaczyć, że znamy kilka odmian prawa kontrapozycji; jedną z nich jest zdanie odwrotne względem (II):

Z tego, że: jeśli nie q , to nie p , wynika, że: jeśli p , to q .

Prawo to pozwala ze zdania przeciwstawnego wyprowadzić zdanie wyjściowe, a ze zdania przeciwnego – zdanie odwrotne.

§15 Reguły dowodzenia; dowody zupełne

Przyjrzyjmy się bliżej mechanizmowi dowodu, za pomocą którego udowodniliśmy prawo (IV) w poprzednim paragrafie; doprowadzi to nas do następnego tematu. Poza regułami definiowania, o których już mówiliśmy, mamy inne reguły nieco podobnej natury, mianowicie REGUŁY DOWODZENIA, lub REGUŁY DOWODU. Reguły te, których nie należy mieszać z prawami logiki, pouczają nas, jak powinniśmy przekształcać zdania, uznane już za prawdziwe, by otrzymać nowe zdania prawdziwe. Dwie takie reguły – REGUŁĘ PODSTAWIANIA i REGUŁĘ ODRYWANIA (znaną także jako REGUŁĘ MODUS PONENS) – zastosowaliśmy w przeprowadzonym wyżej dowodzie.

* * *

Reguła podstawiania powiada, co następuje. Jeśli prawo o charakterze ogólnym, uznane już za prawdziwe, zawiera zmienne zdaniowe i jeśli te zmienne zastąpimy bądź innymi zmiennymi zdaniowymi bądź funkcjami zdaniowymi bądź wreszcie zdaniami – podstawiając zawsze jednakowe wyrażenia w miejsce tej samej zmiennej – to uzyskane w ten sposób zdanie wolno uznać za prawdziwe. Przez zastosowanie tej właśnie reguły otrzymaliśmy prawo (III) z prawa (II). Trzeba podkreślić, że regułę podstawiania można stosować również do zmiennych innych rodzajów, np. do zmiennych „ x ”, „ y ”, ... oznaczających liczby: na miejsce tych zmiennych wolno podstawiać dowolne symbole i wyrażenia, będące nazwami liczb.[†]

* * *

*Podane tu sformułowanie reguły podstawiania nie jest zupełnie precyzyjne. Reguła ta dotyczy takich praw, które składają się z kwantyfikatora ogólnego i następującej po nim funkcji zdaniowej, zawierającej zmienne związane przez ten kwantyfikator. Chcąc zastosować regułę podstawiania, opuszczamy kwantyfikator, a na miejsce zmiennych uprzednio przezeń związanych podstawiamy inne zmienne lub

[†]Reguła podstawiania przypomina zamiany, o których mówiliśmy w rozdziale I. Tam jednak chodziło nam głównie o przekształcenia funkcji zdaniowych w zdania, nie zaś o reguły dowodzenia. – Zwracamy tu uwagę, że tradycyjnie stosuje się słowo „podstawienie” w odniesieniu do zasady podanej w tekście. Słowa „zastępowanie” używa się powszechnie w formułowaniu innych zasad (por. §§ 17 i 45). Jedno i drugie słowo może być wszakże użyte w nieformalnej dyskusji jak ta w rozdziale I.

odpowiednie wyrażenia złożone (np. na miejsce zmiennych „ p ”, „ q ”, „ r ”, ... – zmienne zdaniowe lub zdania, zaś wyrażenia oznaczające liczby na miejsce zmiennych „ x ”, „ y ”, „ z ”, ...). Jeśli w funkcji zdaniowej występują inne zmienne związane, pozostawiamy je bez zmiany i dbamy też o to, by wyrażenia, które podstawiamy, ich nie zawierały. Wreszcie, otrzymane w ten sposób wyrażenie poprzedzamy w razie potrzeby kwantyfikatorem ogólnym tak, by utworzyć z niego zdanie. Zilustrujmy te rozważania stosując regułę podstawiania do zdania:

dla dowolnej liczby x istnieje taka liczba y , że $x + y = 5$,

z którego możemy otrzymać następujące zdanie:

istnieje taka liczba y , że $3 + y = 5$,

a także zdanie:

dla dowolnej liczby z istnieje taka liczba y , że $z^2 + y = 5$.

W tych dwóch przykładach dokonaliśmy podstawienia pod „ x ”, zaś „ y ” pozostawiliśmy bez zmiany. Nie wolno nam jednak podstawić za „ x ” żadnego wyrażenia zawierającego „ y ”, bowiem mimo prawdziwości zdania wyjściowego moglibyśmy dojść w ten sposób do zdania fałszywego. Na przykład podstawiając „ $3 - y$ ” moglibyśmy otrzymać:

*istnieje taka liczba y , że $(3 - y) + y = 5$.**

* * *

Reguła odrywania orzeka, że z chwilą, gdy uznaliśmy za prawdziwe dwa zdania, z których jedno ma postać implikacji, a drugie jest poprzednikiem tej implikacji, to wolno nam uznać za prawdziwy również następnik tej implikacji.^{††} (Jak gdyby „odrywamy” poprzednik od całej implikacji.) Reguła ta, na przykład, pozwala wyprowadzić prawo (IV) z (III) i (I).

^{††}Chcielibyśmy sparafrazować niektóre z powyższych uwag. Gdy mamy do czynienia z teorią naukową, to prawdziwe zdania w niej występujące są po prostu jej prawami (por. § 1). Można by zatem powiedzieć, że reguła dowodzenia dostarcza metody przekształcania danych praw w nowe. – Rzecz jasna, reguły takiej samej w sobie nie możemy uważać za prawo, należące czy to do logiki, czy do konkretnej teorii. Por. odpowiednia uwaga w akapicie wstępnym do tego paragrafu.

* * *

Widać stąd, że w przeprowadzonym powyżej dowodzie prawa (IV) każdy krok polegał na zastosowaniu zasady dowodzenia do zdań uprzednio już przyjętych (bądź uznanych) za prawdziwe. Dowód taki nazywa się ZUPEŁNYM. Nieco dokładniej można by go scharakteryzować następująco: dowód zupełny polega na budowaniu *łańcucha zdań takich, że pierwszymi jego ogniwami są zdania wcześniej już uznane za prawdziwe; każde kolejne ogniwo daje się uzyskać z poprzednich przez zastosowanie reguły dowodzenia; ostatnie ogniwo jest zdaniem, które dowodzimy*.

Warto zwrócić uwagę, jak niezmiernie elementarną postać – z psychologicznego punktu widzenia – przybierają wszystkie dowody zupełne dzięki znajomości praw logiki i reguł dowodzenia; skomplikowane procesy myślowe dają się sprowadzić do takich prostych czynności, jak uważne przyglądanie się prawom, uprzednio już uznanym za prawdziwe, dostrzeganie strukturalnych (czysto zewnętrznych) związków między nimi i wykonywanie mechanicznych przekształceń przepisanych przez reguły dowodzenia. Rzecz jasna, że przy takim sposobie postępowania możliwość popełnienia błędu w dowodzie zostaje praktycznie wyeliminowana.[‡]

Ćwiczenia

1. Podać przykłady wyrażeń o charakterze specyficznie matematycznym z zakresu arytmetyki i geometrii.
2. W następujących dwóch prawach wyróżnić wyrażenia specyficznie matematyczne i wyrażenia z zakresu logiki (do tych drugich zaliczyć symbol „=” oraz słowo „jednakowo”):

[‡]Ostatnie dwa paragrafy są może zbyt krótkie, by wytworzyć u czytelnika pełne przekonanie, że rachunek zdaniowy jest podstawowym narzędziem wnioskowania dedukcyjnego. Przekonanie to dozna jednak potwierdzenia w dalszym ciągu książki, gdzie czytelnik znajdzie różnorodne zastosowania rachunku zdań do rozumowań matematycznych. Z drugiej strony, analizę spójników zdaniowych oraz sprawdzanie praw metodą tabelk prawdziwościowych (tematy, którym ten rozdział został w dużej mierze poświęcony) trzeba traktować jako przygotowanie do wskazanego zadania, nie zaś jako cele same w sobie.

- (a) dla dowolnych liczb x i y , jeśli $x > 0$ i $y < 0$, to istnieje taka liczba z , że $z < 0$ i $x = y \cdot z$;
- (b) dla dowolnych punktów A i B istnieje punkt C , który leży między A i B i jest jednakowo odległy od A i B .

3. Utworzyć koniunkcję negacji następujących funkcji zdaniowych:

$$x < 3 \quad \text{i} \quad x > 3.$$

Jaka liczba spełnia tę koniunkcję?

4. Określić, w którym z dwu opisanych znaczeń wyraz „lub” występuje w następujących zdaniach:

- (a) miał dwie drogi do wyboru: zdradzić ojczyznę lub umrzeć;
- (b) gdy zarobię dużo pieniędzy lub wygram na loterii, wyjadę w długą podróż.

Podać inne przykłady użycia słowa „lub” w obu znaczeniach.

*5. Rozważyć następujące zdania warunkowe:

- (a) jeśli dziś jest poniedziałek, to jutro jest wtorek;
- (b) jeśli dziś jest poniedziałek, to jutro jest sobota;
- (c) jeśli dziś jest poniedziałek, to 25 grudnia jest Boże Narodzenie;
- (d) jeśli życzenia byłyby koźmi, to żebracy jeździliby wierzchem;
- (e) jeśli liczba jest podzielna przez 2 i przez 6, to jest ona podzielna przez 12;
- (f) jeśli 18 jest podzielne przez 3 i przez 4, to 18 jest podzielne przez 6.

Które z powyższych implikacji są prawdziwe, a które fałszywe z punktu widzenia logiki matematycznej? W których z tych przypadków pytanie o sensowność, prawdziwość, czy fałszywość budzi wątpliwości z punktu widzenia zwykłego języka? Zwrócić szczególną uwagę na zdanie (b) i zbadać, jak jego prawdziwość zależy od dnia tygodnia, w którym zdanie to było wypowiedzane.

6. Sformułować następujące twierdzenia w postaci zwykłych zdań warunkowych:

- (a) *na to, by trójkąt był równoboczny, wystarcza, by wszystkie kąty przystawały do siebie;*
- (b) *warunek, że x jest podzielne przez 3, jest konieczny, by x było podzielne przez 6.*

Podać inne równoznaczne sformułowania obu powyższych zdań.

7. Czy warunek:

$$x \cdot y > 4$$

jest wystarczający, czy konieczny, by:

$$x > 2 \text{ i } y > 2?$$

8. Podać inne równoznaczne sformułowania następujących zdań:

- (a) *x jest podzielne przez 10 wtedy i tylko wtedy, gdy x jest podzielne zarówno przez 2, jak przez 5;*
- (b) *na to, by czworokąt był równoległobokiem potrzeba i wystarcza, by punkt przecięcia jego przekątnych był równocześnie środkiem tych przekątnych.*

Podać inne przykłady twierdzeń z zakresu arytmetyki i geometrii, które posiadają postać równoważności.

9. Które z następujących zdań są prawdziwe?

- (a) *trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wysokości trójkąta przystają do siebie;*
- (b) *warunek, że $x \neq 0$ jest konieczny i wystarczający na to, by x^2 było liczbą dodatnią;*
- (c) *z tego, że czworokąt jest kwadratem wynika, że wszystkie kąty czworokąta są proste i odwrotnie;*
- (d) *na to, by x było podzielne przez 8 potrzeba i wystarcza, by x było podzielne przez 4 i przez 2.*

10. Założywszy, że terminy „liczba naturalna”[†] i „iloczyn” (bądź „iloraz”) są nam już znane, zbudować definicję terminu „podzielny”, nadając jej formę równoważności:

[†]Przypominamy, że *liczba naturalna* to dodatnia liczba całkowita lub zero, czyli jedna z następujących liczb: 0, 1, 2, etc.

mówimy, że x jest podzielne przez y wtedy i tylko wtedy, gdy ...

W analogicznej postaci sformułować definicję terminu „prosta równoległa”; jakie terminy (z dziedziny geometrii) należy w tym celu przyjąć za znane?

11. Następujące wyrażenia symboliczne przetłumaczyć na zwykły język:

- (a) $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$,
- (b) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,
- (c) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,
- (d) $\sim p \vee [q \leftrightarrow (p \rightarrow q)]$.

Zwrócić szczególną uwagę na trudności w odróżnieniu od siebie trzech ostatnich wyrażen, gdy się je sformułuje w zwykłym języku.

12. Sformułować następujące wyrażenia za pomocą symboli logicznych:

- (a) *jeśli nie p lub nie q , to nie zachodzi, że p lub q ;*
- (b) *jeśli p pociąga za sobą, że q pociąga za sobą r , to p i q razem pociągają za sobą r ;*
- (c) *jeśli r wynika z p i r wynika z q , to r wynika z p lub q .*

13. Zbudować tabelki prawdziwościowe dla wszystkich funkcji zdaniowych podanych w ćwiczeniach 11 i 12. Przyjąć, że funkcje te interpretujemy jako zdania (co to znaczy?) i określić, które ze zdań otrzymanych w ten sposób są prawdziwe, a które fałszywe.

14. Metodą tabelki prawdziwościowych potwierdzić prawdziwość następujących zdań:

- (a) $\sim \sim p \leftrightarrow p$,
- (b) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$,
 $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$,
- (c) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,
 $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

Zdanie (a) jest PRAWEM PODWÓJNEGO PRZECZENIA, zdania (b) nazywamy PRAWAMI DE MORGANA,⁶ zaś zdania (c) są PRAWAMI ROZDZIELNOŚCI (mnożenia logicznego względem dodawania i dodawania logicznego względem mnożenia).

15. Dla każdego z następujących zdań utworzyć zdania sprzężone (zdanie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne):

- (a) *założenie, że x jest liczbą dodatnią pociąga za sobą, że $-x$ jest liczbą ujemną;*
- (b) *jeśli czworokąt jest prostokątem, to można opisać na nim okrąg.*

Które ze zdań sprzężonych są prawdziwe?

Dlaczego nie da się podać przykładu czterech zdań sprzężonych, z których wszystkie byłyby fałszywe?

16. Wytlumaczyć następujący fakt w oparciu o tabelkę prawdziwościową dla funkcji „ $p \leftrightarrow q$ ”: jeśli w jakimkolwiek zdaniu niektóre z jego części będące też zdaniami zostaną zastąpione przez zdania równoważne, to całe nowe zdanie, otrzymane w ten sposób, jest równoważne zdaniu wyjściowemu (zauważmy, że wniosek ten obejmuje również funkcje zdaniowe). Pewne z naszych stwierdzeń i uwag w § 11 zasadały się na tym fakcie; wskazać które.

17. Rozważyć następujące dwa zdania:

- (a) *z tego, że: jeśli p , to q , wynika, że: jeśli q , to p ;*
- (b) *z tego, że: jeśli p , to q , wynika, że: jeśli nie p , to nie q .*

Przypuśćmy, że zdania te są prawami logiki; czy byłoby możliwe zastosować je do dowodów matematycznych, jak w przypadku prawa kontrapozycji w § 14? Które ze zdań sprzężonych można by wyprowadzić z danej dowiedzionej implikacji? Czy możemy zatem podtrzymać nasze przypuszczenie, że zdania (a) i (b) są prawdziwe?

18. Potwierdzić wniosek wyciągnięty w ćwiczeniu 17, stosując metodę tabelk prawdziwościowych do zdań (a) i (b).

19. Rozważyć następujące dwa stwierdzenia:

⁶Prawa te zostały podane przez A. DE MORGANA (1806–1878), wybitnego logika angielskiego.

*z założenia, że wczoraj był poniedziałek, wynika, że dziś jest wtorek;
z założenia, że dziś jest wtorek, wynika, że jutro będzie środa.*

Jakie zdanie można wyprowadzić z powyższych zdań zgodnie z prawem sylogizmu warunkowego (por. § 12)?

***20.** Przeprowadzić dowód zupełny zdania otrzymanego w poprzednim ćwiczeniu; użyć podanych tam stwierdzeń i prawa sylogizmu hipotetycznego (lub, warunkowego), stosując przy tym – obok reguł podstawiania i odrywania – następującą regułę dowodzenia: jeśli uznajemy za prawdziwe jakiegokolwiek dwa zdania, to wolno również uznać za prawdziwą koniunkcję tych zdań.

III

O teorii identyczności

§16 Pojęcia logiczne spoza rachunku zdań; pojęcie identyczności

Rachunek zdań, któremu poświęciliśmy poprzedni rozdział, jest tylko jednym działem logiki, ale niewątpliwie najbardziej podstawowym, gdyż jego terminy i prawa wykorzystujemy przy definiowaniu innych terminów oraz przy formułowaniu i dowodzeniu praw logicznych spoza rachunku zdań. Z drugiej strony, sam rachunek zdań nie stanowi dostatecznej podstawy dla ugruntowania innych nauk, zwłaszcza matematyki. W definicjach, twierdzeniach i dowodach matematycznych stale napotykamy rozmaite pojęcia z różnych gałęzi logiki. Niektóre z nich omówimy w tym i następnych rozdziałach.

* * *

Najważniejszym bodaj pojęciem logicznym spoza rachunku zdań jest pojęcie IDENTYCZNOŚCI lub RÓWNOŚCI. Występuje ono w zwrotach typu:

x jest identyczne z y,
x jest tym samym co y,
x równa się y.

Wszystkim tym zwrotom przypisujemy to samo znaczenie, które zwięźle oddajemy wyrażeniem symbolicznym:

$$x = y.$$

Podobnie, zamiast pisać:

x nie jest identyczne z y

lub

x jest różne od y

posługujemy się wzorem:

$$x \neq y.$$

Prawa ogólne, rządzące powyższymi wyrażeniami, stanowią dział logiki, który będziemy nazywać TEORIĄ IDENTYCZNOŚCI.

§17 Podstawowe prawa teorii identyczności

Wśród praw logicznych związanych z pojęciem identyczności najbardziej fundamentalne jest następujące zdanie:

I. *x = y wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada każdą własność, którą posiada y, zaś y posiada każdą własność, którą posiada x.*

Możemy też powiedzieć prościej, że

x = y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y posiadają wspólnie każdą własność.

Znane są też inne, może bardziej przejrzyste, lecz mniej poprawne sformułowania tego prawa. Na przykład[†]:

x = y wtedy i tylko wtedy, gdy wszystko, co da się powiedzieć o jednym z przedmiotów x lub y, da się też powiedzieć o drugim.

Prawo oznaczone wyżej numerem I zostało po raz pierwszy sformułowane przez LEIBNIZA¹ (jakkolwiek w nieco inny sposób), toteż możemy być nazywane PRAWEM LEIBNIZA. Ma to prawo postać równoważności, która umożliwia nam zastąpienie wzoru:

$$x = y,$$

[†]W obecnej książce słowo „przedmiot” może odnosić się nie tylko do konkretnych, fizycznych, przedmiotów, lecz również do obiektów abstrakcyjnych, jak liczby i punkty. W matematyce takie i bardziej złożone obiekty abstrakcyjne występują, oczywiście, na każdym kroku.

Czytelnik pewnie zauważył, że w poprzednim rozdziale własności przedmiotów odgrywały drugorzędną rolę. Od tej chwili jednak przedmioty i ich własności będą się znajdować w centrum naszych rozważań.

¹Por. ods. 1, str. 20.

będącego lewą stroną podanej wyżej równoważności, przez jej prawą stronę, czyli wyrażenie, które już nie zawiera owego symbolu identyczności. Z tego punktu widzenia powyższe prawo można uważać za definicję symbolu „=”; tak zresztą traktował je LEIBNIZ. (Oczywiście, stosowanie prawa LEIBNIZA jako definicji symbolu „=” miałoby sens tylko wtedy, gdyby znaczenie znaku „=” było dla nas mniej zrozumiałe, niż znaczenie wyrażeń, stojących po prawej stronie równoważności, jak np.: *„x posiada każdą własność, którą posiada y”*; por. § 11.)

Z prawa LEIBNIZA wynika reguła o dużym znaczeniu praktycznym, mianowicie REGUŁA ZASTĘPOWANIA RÓWNYCH. Otóż jeśli w pewnym kontekście przyjmiemy lub udowodnimy wzór o postaci równości, np.:

$$x = y^2,$$

to wówczas w każdym wzorze lub zdaniu występującym w tymże kontekście możemy zastąpić lewą stronę równania przez prawą stronę, w tym przypadku „ x ” przez „ y^2 ”, i odwrotnie. Rozumie się przy tym, że jeśli „ x ” występuje we wzorze w kilku miejscach, to w jednych miejscach wolno nam pozostawić go bez zmiany, w innych zaś – zastąpić przez „ y^2 ”. Na tym właśnie polega zasadnicza różnica między rozważaną regułą a regułą podstawiania, o której była mowa w § 15, a która nie pozwalała na takie częściowe zastępowanie jednego symbolu przez drugi.^{††}

* * *

Z prawa LEIBNIZA można wyprowadzić szereg innych praw, które należą do teorii identyczności i które często stosuje się w różnych rozumowaniach, szczególnie zaś w dowodach matematycznych. Podamy tu najważniejsze z tych praw, szkicując jednocześnie ich dowody. Zobaczymy na konkretnych przykładach, że rozumowanie logiczne nie różni się niczym istotnym od rozumowania matematycznego.

^{††}Czytelnik niewątpliwie pamięta ze swych pierwszych lekcji rozwiązywania równań regułę zastępowania równych i ją docenia. Istnieją jednak powody, by przy rozważaniu dowodów zupełnych nie włączać jej do podstawowych reguł dowodzenia (por. § 15). – Zauważmy, że w poprzednich wydaniach *Wprowadzenia do logiki* regułę tę wprowadzano w sposób nieformalny, bez specjalnego podkreślenia, i rzadko przytaczano ją w dalszych rozważaniach. Powoływano się niemal wyłącznie na prawo LEIBNIZA. W niniejszym wydaniu prawo to cytujemy jak w wydaniach poprzednich, ale przy kilku okazjach odwołujemy się również do reguły zastępowania.

II. *Każdy przedmiot jest równy samemu sobie: $x = x$.*

Dowód.[‡] Korzystając z reguły podstawiania, podstawmy w prawie LEIBNIZA „ x ” zamiast „ y ”. Otrzymamy:

$x = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada każdą własność, którą posiada x oraz x posiada każdą własność, którą posiada x .

Oczywiście możemy uprościć to zdanie, opuszczając jego ostatnią część: „*oraz x posiada ...*” (na mocy jednego z praw tautologii podanych w § 13). Zdanie to przyjmie wówczas następującą postać:

$x = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada każdą własność, którą posiada x .

Rzecz jasna, prawa strona tej równoważności jest zawsze spełniona (bowiem zgodnie z prawem identyczności podanym w § 12, jeśli x posiada pewną własność, to również x posiada tę własność). Musi być więc spełniona i lewa strona równoważności; innymi słowy, zawsze mamy:

$$x = x,$$

co było do dowiedzenia.

III. *Jeśli $x = y$, to $y = x$.*

Dowód. Podstawmy w prawie LEIBNIZA „ x ” zamiast „ y ”, „ y ” zaś zamiast „ x ”. Otrzymamy:

$y = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy y posiada każdą własność, którą posiada x oraz x posiada każdą własność, którą posiada y .

Porównajmy to zdanie z oryginalnym sformułowaniem prawa LEIBNIZA. Mamy tu dwie równoważności takie, że ich prawe strony są koniunkcjami różniącymi się jedynie kolejnością członów. Prawe strony są równoważne (por. prawo przemienności dla mnożenia logicznego w § 13), a zatem lewe strony, czyli wzory:

$$x = y \quad \text{ i } \quad y = x$$

[‡]Ponownie przywołujemy pojęcie dowodu zupełnego. (Por. poprzedni odnośnik i § 15.) Często jednak dowody z zakresu logiki i matematyki przedstawia się bez ścisłego trzymania się reguł, które tam opisano; przykładem – przeprowadzony wyżej dowód. Dowody takie nazywamy czasami NIEFORMALNYMI.

muszą być także równoważne. *A fortiori* wolno nam stwierdzić, że drugi z tych wzorów wynika z pierwszego, wobec czego nasze prawo jest udowodnione.

IV. *Jeśli $x = y$ i $y = z$, to $x = z$.*

Dowód. Zakładamy, że oba wzory:

$$(1) \quad x = y$$

i

$$(2) \quad y = z$$

są słuszne.^{††} Zgodnie z prawem LEIBNIZA ze wzoru (2) wynika, że każda własność y dotyczy także z . Wolno nam zatem zastąpić we wzorze (1) zmienną „ y ” zmienną „ z ”, a wówczas otrzymamy pożądaną tezę (w gruncie rzeczy krok ten można by uzasadnić powołując się po prostu na prawo zastępowania równych):

$$x = z.$$

V. *Jeśli $x = z$ i $y = z$, to $x = y$; innymi słowy, dwa przedmioty równe trzeciemu, są sobie równe.*

Prawo to można dowieść w analogiczny sposób, co prawo poprzednie (możemy je również wydedukować z praw III i IV, nie stosując prawa LEIBNIZA).

Prawa II, III i IV nazywane są, odpowiednio, PRAWAMI ZWROTNOŚCI, SYMETRII I PRZECHODNIOŚCI dla relacji identyczności.

^{††}Chcielibyśmy skomentować tu słowa „słuszny” i „prawdziwy”. W rozdziałach I i II pojawia się termin „zdanie prawdziwe”. Termin ten i jego antonim „zdanie fałszywe” były przedmiotem wielu dyskusji filozoficznych, w książce jednak posługujemy się nimi w sposób niedwuznaczny: w odniesieniu do zdań zaczerpniętych z teorii matematyki elementarnej lub prostych przykładów z języka codziennego. Co zaś do terminu „słuszny”, to ma on szersze znaczenie (i nie wzbudza takich kontrowersji). W matematyce używa się go często w podobny sposób, co terminu „prawdziwy”. Zatem w pewnych kontekstach (szczególnie w odniesieniu do wybranych modeli i interpretacji, por. rozdziały VI i IX) słowo „słuszny” może znaczyć „prawdziwy”. I rzeczywiście, w niektórych sytuacjach słów tych używa się zamiennie. Poza tym istnieje pewna preferencja, by w odniesieniu do funkcji zdaniowych używać słowa „słuszny”. Tu „słuszny” oznacza mniej więcej tyle, co „spełniony przy każdym podstawieniu zmiennych”. Czasami „słuszny” oznacza to samo, co „dowodzony” lub „dowodny”. – Znane są też inne użycia tego słowa; mówi się np. „słuszny argument”.

§18 Identyczność przedmiotów i identyczność ich oznaczeń; użycie cudzysłowu

*Wprawdzie znaczenie wyrażeń takich jak:

$$x = y \quad \text{i} \quad x \neq y$$

pozornie nie budzi wątpliwości, to jednak bywają one czasami błędnie rozumiane. Na przykład wydaje się oczywiste, że wzór:

$$3 = 2 + 1$$

jest zdaniem prawdziwym, ale niektórzy ludzie nie są o tym przekonani. Według nich wzór ten stanowi jakoby stwierdzenie identyczności symboli „3” i „2+1” co jest, rzecz jasna, fałszem, bowiem symbole te różnią się kształtem, wobec czego nie jest prawdą, że wszystko, co można powiedzieć o jednym z nich, da się też powiedzieć o drugim (dodajmy jeszcze, że pierwszy symbol jest pojedynczym znakiem, drugi zaś nie).

* * *

Aby pozbyć się pokutujących wciąż niejasności w tej kwestii, musimy wyjaśnić sobie ogólną i bardzo ważną zasadę, której należy przestrzegać, jeśli chcemy posługiwać się językiem w sposób użyteczny. Zgodnie z tą zasadą ilekroć formułujemy zdanie o pewnym przedmiocie, musimy użyć w nim tego przedmiotu, lecz jego nazwy czyli (inaczej mówiąc) jego oznaczenia.

Przestrzeganie tej zasady nie nastrocza żadnych kłopotów, póki przedmiot, o którym mówimy, nie jest wyrazem lub symbolem, lub, bardziej ogólnie, nie jest wyrażeniem językowym. Wyobraźmy sobie oto, że mamy przed sobą niebieski kamień i że zapisujemy następujące zdanie:

ten kamień jest niebieski.

Przypuszczalnie nikomu nie przyszłoby do głowy zastąpić w tym zdaniu słów „*ten kamień*” (które razem stanowią opis przedmiotu) samym przedmiotem, a więc je wykreślić lub wyciąć, a na ich miejscu umieścić kamień. Gdybyśmy bowiem coś takiego zrobili, otrzymalibyśmy całość składającą się częściowo z kamienia, częściowo ze słów – coś, co nie jest wyrażeniem językowym, a tym bardziej zdaniem prawdziwym.

Podana wyżej zasada bywa jednak często naruszana, gdy omawiany przedmiot jest słowem lub symbolem. Tymczasem również w tym przypadku przestrzeganie jej jest konieczne; w przeciwnym razie dochodzimy do czegoś, co będąc wyrażeniem językowym, nie tylko nie oddaje naszej myśli, ale zgoła może się okazać zlepkiem słów pozbawionym znaczenia. Weźmy na przykład następujące dwa słowa:

dobra, Marysia.

Widać, że pierwsze składa się z pięciu liter, drugie zaś jest imieniem własnym. Przypuśćmy, że wyrazimy te myśli, które są zupełnie prawidłowe, w następujący sposób:

- (1) *dobra składa się z pięciu liter;*
- (2) *Marysia jest imieniem własnym;*

a mówiąc o tych słowach, będziemy używać ich samych, nie zaś ich nazw. Jeśli jednak przyjrzymy się dokładniej wyrażeniom (1) i (2), to stwierdzimy, że pierwsze wcale nie jest zdaniem, ponieważ podmiotem zdania może być tylko rzeczownik, a nie przymiotnik, jak w tym przypadku; drugie zaś, nawet gdyby uznać je za zdanie sensowne, byłoby tak czy inaczej fałszywe, jako że żadna kobieta nie jest imieniem własnym.

Nieporozumienie wynika z nieuświadomienia sobie, że słowa „*dobra*” i „*Marysia*” występując w takich kontekstach, jak w (1) i (2), mają inne znaczenie, niż normalnie; tu bowiem słowa te funkcjonują, jako swe własne nazwy. Aby uogólnić ten punkt widzenia, musieliśmy przyjąć, że każde słowo może czasem funkcjonować jako своя nazwa. Używając terminologii logiki średniowiecznej powiemy, że słowo zostało użyte w SUPPOSITIO MATERIALIS, a nie w SUPPOSITIO FORMALIS, to znaczy – w swym zwyczajnym znaczeniu.[†] W konsekwencji każde słowo języka codziennego czy naukowego może przyjmować dwa lub więcej różne znaczenia i nie trzeba daleko szukać przykładów sytuacji, w których pojawiają się poważne wątpliwości co do zamierzonego znaczenia danego słowa. Nie godząc się na takie

[†]Dla czytelnika może być pouczające porównanie powyższych rozważań z uwagami w § 9. Jedne i drugie dotyczą wyrażań, lecz wyrażań różnych rodzajów. Zasadniczo wyrażenia pierwszego rodzaju wskazują na przedmioty, drugiego zaś odnoszą się do stwierdzeń. Jeśli chodzi o wyrażenia drugiego rodzaju, czyli o zdania i funkcje zdaniowe, to mówimy, że wyrażając stwierdzenie bezpośrednie, UŻYWAMY zdania, natomiast w sformułowaniu pośrednim, jak w § 9, PRZYTACZAMY dane zdanie.

dwuznaczności, ustanawiamy regułę, że każde wyrażenie powinno się różnić (przynajmniej w formie pisemnej) od swojej nazwy.

* * *

Powstaje pytanie, w jaki sposób tworzyć nazwy słów i wyrażeń. Z wielu pomysłów, które się tu nasuwają, najprostszy polega na tym, że nazwę wyrażenia tworzymy umieszczając je w cudzysłowie. Zgodnie z tą konwencją, myśli wyrażone próbnie w (1) i (2) zapiszemy teraz prawidłowo i niedwuznacznie w następujący sposób:

(I) *„dobra” składa się z pięciu liter;*

(II) *„Marysia” jest imieniem własnym.*

W świetle tych uwag znikają wszelkie ewentualne wątpliwości odnośnie znaczenia i prawdziwości wzorów typu:

$$3 = 2 + 1.$$

Wzór ten zawiera symbole, które oznaczają pewne liczby, ale nie zawiera nazw żadnego z tych symboli. Zatem wzór ten stwierdza coś o liczbach, a nie o oznaczających je symbolach. Liczba 3 jest oczywiście równa liczbie $2 + 1$, tak więc wzór jest stwierdzeniem prawdziwym. Rzecz jasna, wolno nam zastąpić go zdaniem wyrażającym tę samą myśl, ale w odniesieniu do symboli, mianowicie, zdaniem, które stwierdza, że symbole „3” i „ $2 + 1$ ” oznaczają tę samą liczbę. Z tego jednak żadną miarą nie wynika, że symbole jako takie są identyczne; dobrze bowiem wiadomo, że dany przedmiot – szczególnie dana liczba – może mieć wiele różnych oznaczeń. Symbole „3” i „ $2 + 1$ ” są bez wątpienia różne, które to spostrzeżenie możemy wyrazić za pomocą nowego wzoru:

$$\text{„3”} \neq \text{„2 + 1”}.$$

Wzór ten absolutnie nie pozostaje w sprzeczności ze wzorem przytoczonym poprzednio.²

²Konwencji regulującej użycie cudzysłowu przestrzegamy w tej książce dosyć rygorystycznie; odchodzimy od niej tylko w specjalnych przypadkach – na rzecz tradycyjnego zapisu. Na przykład opuszczamy cudzysłów, jeśli wzory i zdania znajdują się w osobnej linii, lub gdy występują w sformułowaniach twierdzeń

§19 Równość w arytmetyce i w geometrii oraz jej związek z identycznością logiczną

Pojęcie równości między liczbami traktujemy tu zawsze jako specjalny przypadek ogólnego pojęcia identyczności logicznej.[†] Trzeba jednak wiedzieć, że byli (i może wciąż są) matematycy, którzy – odwrotnie niż my tutaj – nie utożsamiali występującego powszechnie w matematyce znaku „=” z symbolem identyczności logicznej. Liczb równych nie uważali oni za koniecznie identyczne, a równość między liczbami traktowali jako specyficzne pojęcie arytmetyki. W związku z tym odrzucali prawo LEIBNIZA w jego postaci ogólnej, uznawali natomiast za prawdziwe rozmaite wnioski wynikające z tego prawa – wnioski jak te, które odnoszą się do liczb. Mają one charakter mniej ogólny, wobec czego uważa się je za prawa specyficzne dla matematyki. Takimi wnioskami są prawa II – V z § 17, podobnie jak zdania stwierdzające, że ilekroć $x = y$ i x spełnia pewien wzór zbudowany wyłącznie z symboli arytmetycznych, to y spełnia ten sam wzór, czego przykładem jest następujące prawo:

$$\text{jeśli } x = y \quad \text{i} \quad x < z, \quad \text{to} \quad y < z.$$

Naszym zdaniem, stanowisko to nie posiada żadnych szczególnych zalet z teoretycznego punktu widzenia, w praktyce zaś pociąga za sobą duże komplikacje przy wykładzie arytmetyki. Odrzuca się bowiem ogólną regułę, która pozwala nam – przy założeniu, że $x = y$

matematycznych lub logicznych; nie bierzemy w cudzysłów również wyrażen poprzedzonych sformułowaniami w rodzaju „nazywany”, „znany jako” itp. W tych przypadkach przyjmujemy jednak inne środki ostrożności; wyrażenia, o które nam chodzi, poprzedzamy dwukropkiem, a ponadto zapisujemy je inną czcionką (małym wersalikiem lub kursywą). Należy jeszcze zauważyć, że w języku codziennym cudzysłowu używa się w pewnych dodatkowych okolicznościach – w książce znajdując się przykłady również takiego użycia.

[†]Kilka odsyłaczy w tym rozdziale dotyczyło użycia słów. Teraz chcielibyśmy rozważyć „pojęcie”, a szczególnie „pojęcie identyczności”. W zasadzie o pojęciu można myśleć jako o czymś w rodzaju pojemnego przedstawienia, syntezy kilku składników. Zgodnie z tym, gdy przewiduje się szeroką interpretację, pojęcie identyczności mogłoby obejmować materiał całego tego rozdziału. Wszelako słowo „pojęcie” bywa też używane w sposób bardziej ograniczony; w takim przypadku można by myśleć o pojęciu identyczności jako wyrażanym przez termin „=”, gdy termin ten jest zdefiniowany (czyli scharakteryzowany) przez prawo LEIBNIZA. A skoro jesteśmy przy słowach, to zamiast mówić „termin „=””, można by równie dobrze powiedzieć „stała (logiczna) „=””, lub nawet „symbol „=””. – W książce słowa „pojęcie” używamy przede wszystkim w tym drugim, bardziej ograniczonym sensie.

– zastępować w każdym wzorze lewą stronę przez prawą stronę, a że podobne przekształcenie wzoru jest w wielu rozumowaniach niezbędne, więc za każdym razem, gdy się je stosuje, trzeba wykazać, że w rozważanym konkretnym przypadku jest ono dozwolone.

Zilustrujemy to na przykładzie, biorąc pod uwagę układ równań o dwóch niewiadomych, powiedzmy:

$$\begin{aligned}x &= y^2, \\ x^2 + y^2 &= 2x - 3y + 18.\end{aligned}$$

Aby rozwiązać ten układ za pomocą tzw. metody podstawiania, trzeba utworzyć nowy układ równań, zachowując pierwsze równanie bez zmiany, w drugim zaś zastępując wszędzie „ x ” przez „ y^2 ”. Rodzi się pytanie, czy takie przekształcenie układu jest dozwolone, innymi słowy, czy nowy układ jest równoważny pierwotnemu. Odpowiedź brzmi niewątpliwie twierdząco, niezależnie od tego, jakie przyjmiemy pojęcie równości między liczbami. Jeśli jednak symbol „ $=$ ” uważamy za znak identyczności logicznej i przyjmujemy prawo LEIBNIZA, to odpowiedź jest oczywista. Założenie, że

$$x = y^2$$

pozwala nam wszędzie zastąpić „ x ” przez „ y^2 ” i vice versa. W przeciwnym razie odpowiedź ta wymagałaby uzasadnienia, które – choć nie bardzo trudne – mogłoby się okazać długie i mozolne (dowody takie napotyka się w starych podręcznikach szkolnych).

* * *

Zupełnie inne jest tradycyjne podejście do pojęcia równości w geometrii. Mówiąc czasem, że dwie figury geometryczne – odcinki, kąty, czy wielokąty – są równe, w sensie „*przystające*”, nie twierdzimy wcale, że są one identyczne. Chodzi nam raczej o to, że figury te mają jednakową wielkość i kształt, a więc, że (mówiąc obrazowo, choć nie całkiem dokładnie) można je tak nałożyć jedną na drugą, by się pokryły. W tym sensie na przykład trójkąt może mieć dwa lub nawet trzy boki równe – na tym etapie naszych rozważań powiemy, że jego boki są „geometrycznie równe” – lecz boki te z pewnością nie są identyczne. Z drugiej strony, zdarzają się przypadki, w których chodzi nam nie o równość geometryczną dwóch figur, ale o ich identyczność logiczną. Na przykład w trójkącie równoramiennym wysokość

i środkowa trójkąta, poprowadzone do podstawy, są nie tylko równe w sensie geometrycznym, lecz po prostu są tym samym odcinkiem. By więc uniknąć zamieszania, lepiej unikać konsekwentnie terminu „równość” we wszystkich sytuacjach, w których nie ma się na myśli identyczności logicznej, zamiast o figurach równych w sensie geometrycznym mówić o figurach przystających, a znak „=” zastępować – jak zresztą często się to robi – innym symbolem, mianowicie „ $\cong$ ”.

§20 Kwantyfikatory ilościowe

Posługując się pojęciem identyczności sprecyzujemy teraz znaczenie pewnych zwrotów, zbliżonych (zarówno treścią, jak formą) do kwantyfikatorów ogólnych i szczegółowych, zaliczanych też do operatorów, mających jednak bardziej specjalny charakter. Są to zwroty typu:

*istnieje co najmniej jeden, lub co najwyżej jeden, lub dokładnie jeden przedmiot x taki, że ... ,
istnieją co najmniej dwa, lub co najwyżej dwa, lub dokładnie dwa przedmioty x takie, że ... ,*

i tak dalej. Zwroty te można by nazwać KWANTYFIKATORAMI ILOŚCIOWYMI. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że występują w nich wyrazy specyficznie matematyczne, którymi są liczebniki „jeden”, „dwa” i tym podobne. Bliższa analiza wykazuje jednak, że treść tych zwrotów (jeśli traktować je jako całość) jest czysto logicznej natury. Tak więc w wyrażeniu:

istnieje co najmniej jeden przedmiot, spełniający dany warunek

słowa „co najmniej jeden” można opuścić bez naruszenia sensu. Wyrażenie:

istnieje co najwyżej jeden przedmiot, spełniający dany warunek

znaczy tyle, co:

dla dowolnego x i dowolnego y , jeśli x spełnia dany warunek i jeśli y spełnia dany warunek, to $x = y$.

Zdanie:

istnieje dokładnie jeden przedmiot, spełniający dany warunek

jest równoważne z koniunkcją obu poprzednich wyrażeń:

istnieje co najmniej jeden przedmiot, spełniający dany warunek i jednocześnie istnieje co najwyżej jeden przedmiot, spełniający dany warunek.

Wyrażeniu:

istnieją co najmniej dwa przedmioty, spełniające dany warunek
nadajemy następujące znaczenie:

istnieją takie x i y , że zarówno x jak y spełnia dany warunek i $x \neq y$;

przy czym każde z tych dwóch wyrażeń jest równoważne negacji zdania:

istnieje co najwyżej jeden przedmiot, spełniający dany warunek.

W podobny sposób wyjaśniamy znaczenie innych zwrotów tej kategorii.

Dla ilustracji możemy tu przytoczyć kilka zdań prawdziwych z arytmetyki, w których występują kwantyfikatory ilościowe:

1. *istnieje dokładnie jedna liczba x taka, że $x + 2 = 5$;*
2. *istnieją dokładnie dwie liczby y takie, że $y^2 = 4$;*
3. *istnieją co najmniej dwie liczby z takie, że $z + 2 < 6$.*

* * *

Dział logiki, w którym ustala się ogólne prawa dotyczące kwantyfikatorów, znany jest jako RACHUNEK PREDYKATÓW lub LOGIKA PREDYKATÓW.[†] Teoria ta bada głównie kwantyfikatory ogólne i szcze-

[†]Słowo „predykat” odnosi się do rozważanych cech (do własności i relacji, por. rozdział IV i V) takich jak: *jest mniej niż, jest dokładnie kwadratem, jest przystający do, jest regularnym wielokątem*. – Dwie nazwy „rachunek predykatów” i „logika predykatów”, odpowiadające nazwom „rachunek zdań” i „logika zdań” (por. początek § 7) wynikają nie z doboru słów, lecz z różnego podejścia do przedmiotu. Mówiąc „rachunek”, podkreślamy strukturę, która wykazuje pewne podobieństwo do rachunków, mimo że w grę niekoniecznie wchodzi obliczenia arytmetyczne. Przykładem – tabelki prawdziwościowe. Z drugiej strony, słowo „logika” wskazuje na zasadniczy cel tych dyscyplin, mianowicie, ustalenie natury argumentów matematycznych. Obecnie w nazwach tych dyscyplin częściej występuje słowo „logika”, kiedyś natomiast przeważało słowo „rachunek”. W książce używamy nazwy „rachunek zdań” na wzór poprzednich wydań. – Dodajmy, że we wcześniejszych wydaniach tej książki przytaczaliśmy inne (i starsze) nazwy: „teoria dedukcji” dla rachunku zdań oraz „teoria zmiennych pozornych”, „rachunek funkcyjny” dla logiki predykatów.

główne, podczas gdy opisane wyżej kwantyfikatory ilościowe bywają często pomijane.

Ćwiczenia

1. Udowodnić prawo V z § 17 wyłącznie w oparciu o prawa III i IV, a więc nie korzystając z prawa LEIBNIZA (czy reguły zastępowania równych).

Wskazówka: Wzory:

$$x = z \quad i \quad y = z$$

w prawie V przyjmuje się za spełnione z założenia. Na mocy prawa III zamień zmienne w drugim wzorze, a następnie zastosuj prawo IV.

2. Udowodnić następujące prawo:

$$\text{jeśli } x = y, \quad y = z \quad \text{oraz} \quad z = t, \quad \text{to } x = t,$$

stosując wyłącznie prawo IV z § 17.

3. Czy prawdziwe są zdania otrzymane przez zastąpienie wszędzie w prawach III i IV z § 17 znaku „=” symbolem „≠”?

***4.** W oparciu o podaną w § 18 umowę odnośnie użycia cudzysłowu, określić, które z następujących zdań są prawdziwe:

- (a) *0 jest liczbą całkowitą,*
- (b) *0 jest cyfrą o owalnym kształcie,*
- (c) *„0” jest liczbą całkowitą,*
- (d) *„0” jest cyfrą o owalnym kształcie,*
- (e) $1.5 = \frac{3}{2},$
- (f) *„1.5” = „ $\frac{3}{2}$ ”,*
- (g) $2 + 2 \neq 5,$
- (h) *„2 + 2” ≠ „5”.*

***5.** Chcąc utworzyć nazwę wyrazu, wyraz ów ujmujemy w cudzysłów; aby utworzyć z kolei nazwę nazwy, w cudzysłowie umieszczamy nazwę wyrazu, w wyniku czego sam wyraz znajdzie się w podwójnym cudzysłowie. Z podanych niżej trzech wyrażeń:

Jan, „Jan”, „ „Jan ” ”,

drugie jest nazwą pierwszego, trzecie – nazwą drugiego, pierwsze zaś – nazwą (imieniem) mężczyzny. Zastąpić powyższymi wyrażeniami „ x ” w następujących funkcjach zdaniowych i określić, które z dwunastu zdań otrzymanych w ten sposób są prawdziwe:

- (a) *x jest mężczyzną,*
- (b) *x jest imieniem własnym mężczyzny,*
- (c) *x jest wyrażeniem,*
- (d) *x jest wyrażeniem w cudzysłowie.*

***6.** W § 9 podaliśmy zdania warunkowe w różnych sformułowaniach napotykanym w podręcznikach matematycznych. Zwróciliśmy także uwagę na fakt, że w pewnych z tych sformułowań mówimy nie o liczbach czy własnościach liczb i tym podobnych, lecz o wyrażeniach (w szczególności o zdaniach i funkcjach zdaniowych). Z uwag w § 18 wynika, że te drugie wymagają stosowania cudzysłowu. Wskazać takie sformułowania i dokładne miejsca w nich, gdzie należy użyć cudzysłowu.

***7.** Omówiwszy ogólną zasadę odnośnie użycia nazw przedmiotów w zdaniach, które coś o nich stwierdzają, możemy teraz przyjrzeć się dokładniej przedostatniemu zdaniu z § 12 („Podobnie jak prawa arytmetyki ...”). Wiemy, że zmienne występujące w arytmetyce zastępują nazwy liczb. Czy zmienne, które występują w rachunku zdaniowym zastępują nazwy zdań, czy same zdania?[†] Czy wolno nam więc powiedzieć, jeśli zależy nam na ścisłości, że prawa tego rachunku stwierdzają coś o zdaniach i ich własnościach?

[†]Zauważmy, że, istotnie, w tym kontekście można wprowadzić dwa różne rodzaje zmiennych: te, które zastępują zdania (czyli wyrażenia o strukturze szczególnego rodzaju) i te, które zastępują nazwy zdań, czyli oznaczają zdania. Te dwie możliwości wyraźnie nawiązują do rozróżnienia między używaniem a przytaczaniem zdań. (Por. ods. †, str. 61)

8. Weźmy trójkąt o bokach a , b i c . Niech h_a , h_b i h_c będą wysokościami poprowadzonymi odpowiednio do boków a , b i c ; podobnie, niech m_a , m_b i m_c będą środkowymi tego trójkąta, zaś s_a , s_b i s_c – jego dwusiecznymi.

Przyjmijmy, że rozważany trójkąt jest równoramienny (gdzie a jest podstawą, zaś b i c – równymi bokami). Które spośród wskazanych dwunastu odcinków są przystające (czyli równe w sensie geometrycznym), a które identyczne? Odpowiedź wyrazić wzorami, posługując się symbolem „ $\cong$ ” dla oznaczenia przystawania, a symbolem „ $=$ ” dla oznaczenia identyczności.

Rozwiązać to samo zadanie, zakładając, że rozważany trójkąt jest równoboczny.

9. Wyjaśnić znaczenie zwrotów:

- (a) *istnieją co najwyżej dwa przedmioty, spełniające dany warunek;*
- (b) *istnieją dokładnie dwa przedmioty, spełniające dany warunek.*

10. Zbadać, które z następujących zdań są prawdziwe:

- (a) *istnieje dokładnie jedna liczba x taka, że $x + 3 = 7 - x$;*
- (b) *istnieją dokładnie dwie liczby x takie, że $x^2 + 4 = 4x$;*
- (c) *istnieją co najwyżej dwie liczby y takie, że $y + 5 < 11 - 2y$;*
- (d) *istnieją co najmniej trzy liczby z takie, że $z^2 < 2z$;*
- (e) *dla dowolnej liczby x istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że $x + y = 2$;*
- (f) *dla dowolnej liczby x istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że $x \cdot y = 3$.*

11. Jak można wyrazić za pomocą kwantyfikatorów ilościowych, że równanie:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ma dwa pierwiastki?

12. Które liczby x spełniają funkcję zdaniową:

$$\textit{istnieją dokładnie dwie liczby } y \textit{ takie, że } x = y^2?$$

Wyróżnić w tej funkcji zmienne wolne i związane. *Czy kwantyfikatory ilościowe wiążą zmienne?*

13. (a) Rozważyć następującą funkcję zdaniową:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{Istnieją } x, y \text{ i } z \text{ takie, że } x < a, y < a, z < \\ a, \\ x \neq y, x \neq z \text{ i } y \neq z. \end{array}$$

Wyrazić (1) za pomocą kwantyfikatorów ilościowych. Sformułować (1) używając symboli wprowadzonych w rozdziałach I i II. *(b) Przełożyć podany niżej wzór (2) na zwykły język i pokazać, że zarówno (2) jak (1) są zdaniami prawdziwymi arytmetyki:

$$(2) \quad \forall_{x,y}\{(x < a \wedge y < a) \rightarrow \exists_z[z < a \wedge x \neq z \wedge y \neq z]\}.$$

IV

O teorii klas

§21 Klasy i ich elementy

Poza pojedynczymi, indywidualnymi przedmiotami, które będziemy nazywać krótko także INDYWIDUAMI, logika zajmuje się KLASAMI przedmiotów. W życiu codziennym, jak również w matematyce, zamiast o klasach częściej mówi się o ZBIORACH – w arytmetyce stale mamy do czynienia ze zbiorami liczb, w geometrii zaś interesują nas nie tyle pojedyncze punkty, ile zbiory punktów (czyli konfiguracje geometryczne). Klasy indywiduów noszą nazwę KLAS PIERWSZEGO RZĘDU. Stosunkowo rzadziej w naszych badaniach trafiamy na KLASY DRUGIEGO RZĘDU, czyli klasy składające się nie z indywiduów, lecz z klas pierwszego rzędu. Czasem przychodzi nam się zajmować KLASAMI TRZECIEGO, CZWARTEGO i WYŻSZYCH RZĘDÓW. W książce będziemy mieć do czynienia prawie wyłącznie z klasami pierwszego rzędu i tylko wyjątkowo – w § 26 – z klasami drugiego rzędu. Ale nasze rozważania można praktycznie bez zmian zastosować do klas dowolnego rzędu.

Aby odróżnić indywidua od klas (oraz rozróżnić klasy różnych rzędów), jako zmiennych używa się liter o różnym kształcie i z różnych alfabetów. Indywidualne przedmioty, jak np. liczby oraz klasy takich przedmiotów zwyczajowo oznaczamy, odpowiednio, małymi i dużymi literami łacińskimi. W geometrii elementarnej przyjęło się natomiast, że duże litery oznaczają punkty, małe natomiast (łacińskie i greckie) – zbiory punktów.

Dział logiki, w którym bada się klasy i ich własności, nazywamy TEORIĄ KLAS – teorię tę niekiedy traktuje się jako niezależną dyscyplinę matematyczną i wtedy nazywa się ją TEORIĄ MNOGOŚCI.^{1†}

* * *

Podstawową rolę w teorii klas odgrywają zwroty takie, jak:

przedmiot x jest elementem klasy K ,
przedmiot x należy do klasy K ,
klasa K zawiera w sobie jako element przedmiot x ;

zwroty te uważamy za równoznaczne i zastępujemy je zwięźle wzorem:

$$x \in K.$$

Jeśli więc C jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych, to jego elementami są liczby 1, 2, 3, ..., natomiast liczby $\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, ... do zbioru tego nie należą. Prawdziwe zatem są wzory:

$$1 \in C, \quad 2 \in C, \quad 3 \in C, \dots$$

zaś wzory:

$$\frac{2}{3} \in C, \quad 2\frac{1}{2} \in C, \dots$$

są fałszywe.

¹Początki teorii klas – dokładniej mówiąc, tego działu teorii, który dalej będziemy nazywać algebrą klas – znajdujemy już w pracach BOOLE'A (por. ods. 1, str. 20). Właściwym twórcą teorii mnogości, jako niezależnej dyscypliny matematycznej, jest wielki matematyk niemiecki G. CANTOR (1845–1918); w szczególności zawdzięczamy mu analizę pojęcia porządku oraz takich pojęć, jak równoliczność, liczba kardynalna i nieskończoność, które omówimy przy końcu tego i w następnym rozdziale. – Teoria zbiorów Cantora jest dyscypliną matematyczną, która przez wiele lat przeżywała intensywny rozwój. Jej idee i metody myślenia przeniknęły do wszystkich niemal gałęzi matematyki, wywierając wszędzie wielce stymulujący i zapładniający wpływ.

[†]W książce słów „klasa” i „zbiór” używamy jako synonimów. Bardziej zaawansowane rozważania wymagają rozróżniania między tymi dwoma różnymi rodzajami bytów, wtedy też przypisujemy im nieco różne znaczenia. Utało się, że w matematyce zwykle mamy do czynienia ze zbiorami. – Symbol „ $\in$ ”, pojawiający się poniżej, pochodzi od małej litery greckiej „ ϵ ”, którą też czasami stosuje się dla oznaczenia przynależności do zbioru.

§22 Klasy i funkcje zdaniowe o jednej zmiennej wolnej

Weźmy pod uwagę funkcję zdaniową o jednej zmiennej wolnej, powiedzmy:

$$x > 0.$$

Poprzedzając ją słowami:

(I) *zbiór wszystkich liczb x takich, że*

otrzymujemy wyrażenie:

$$\textit{zbiór wszystkich liczb } x \text{ takich, że } x > 0.$$

Wyrażenie to wyznacza dobrze określony zbiór, mianowicie zbiór wszystkich liczb dodatnich. Zbiór ten składa się z tych i tylko tych elementów, które spełniają daną tu funkcję zdaniową. Jeśli oznaczymy go specjalnym symbolem, np. „ D ”, to nasza funkcja stanie się równoważna wzorowi:

$$x \in D.$$

Analogiczne postępowanie wolno nam zastosować, faktycznie, do dowolnej funkcji zdaniowej. W arytmetyce możemy w ten sposób opisywać rozmaite zbiory liczb, jak np. zbiór wszystkich liczb ujemnych, lub zbiór wszystkich liczb większych od 2 i mniejszych od 5 (czyli tych, które spełniają funkcję „ $x > 2$ i $x < 5$ ”). Taki sposób postępowania odgrywa też ważną rolę w geometrii, zwłaszcza przy definiowaniu rozmaitych figur geometrycznych.[†] I tak, powierzchnię kuli definiuje się, jak zbiór wszystkich punktów w określonej odległości od danego punktu. Zwrot „*zbiór wszystkich punktów*” zwyczajowo zastępuje się w geometrii zwrotem „*miejsce geometryczne wszystkich punktów*”.

* * *

Nadamy teraz powyższym uwagom ogólną postać. W logice przyjmuje się, że każdej funkcji zdaniowej z jedną tylko zmienną wolną,

[†]W książce terminu „*konfiguracja geometryczna*” używamy jako synonimu terminu „*zbiór punktów*”; w takim właśnie znaczeniu słowo „*zbiór*” wystąpiło na początku tego rozdziału. Z kolei, termin „*figura geometryczna*” odnosi się do konfiguracji – że się tak wyrazimy – znanej, bardziej regularnej, jak np. trójkąt, czy kula.

powiedzmy „ x ”, odpowiada dokładnie jedna klasa, zawierająca jako elementy te i tylko te przedmioty x , które spełniają daną funkcję. Oznaczenie tej klasy otrzymuje się stawiając przed funkcją zdaniową zwrot, należący do najbardziej fundamentalnych wyrażen teorii klas, mianowicie:

(II) *klasa wszystkich przedmiotów x takich, że.*

Ponadto, jeśli oznaczymy rozważaną klasę pojedynczym symbolem, np. „ C ”, to wzór:

$$x \in C$$

będzie – dla dowolnego x – równoważny wyjściowej funkcji zdaniowej.

Widzimy zatem, że dowolna funkcja zdaniowa zawierająca „ x ” jako jedyną zmienną wolną, daje się przekształcić w równoważną funkcję o postaci:

$$x \in K,$$

gdzie zamiast „ K ” występuje symbol stały, oznaczający klasę; wzór ten wolno nam więc traktować jako najogólniejszą postać funkcji zdaniowej z jedną zmienną wolną.

Zdania (I) i (II) zastępujemy niekiedy wyrażeniami symbolicznymi; możemy do tego celu używać, na przykład, następującego zapisu:

$$\{x : \dots\}.$$

* * *

*Rozważmy teraz następujące stwierdzenie:

1 należy do zbioru wszystkich liczb x takich, że $x > 0$,

który można również zapisać wyłącznie za pomocą symboli:

$$1 \in \{x : x > 0\}.$$

Bez wątpienia, mamy tu pewne zdanie, które jest prawdziwe. Wyraża ono w bardziej skomplikowany sposób tę samą myśl, co prosty wzór:

$$1 > 0.$$

Tak więc podane wcześniej wyrażenia (z „ $x > 0$ ”) nie mogą zawierać żadnych zmiennych wolnych, zaś zmienna „ x ”, która tam występuje, musi być związana. Z drugiej zaś strony, skoro w powyższych

wyrażeniach nie znajdujemy kwantyfikatorów, dochodzimy do wniosku, że zwroty w wyrażeniu (I) i (II) funkcjonują jako kwantyfikatory, gdyż wiążą zmienne – należy zatem zaklasyfikować je do operatorów (por. § 4).

Trzeba tu dodać, że operatorem takim, jak zwrot w (I) lub w (II), często poprzedzamy funkcję zdaniową, która zawiera – poza „ x ” – inne zmienne wolne (w geometrii zachodzi to niemal za każdym razem, gdy zastosowane są takie operatory). Otrzymane w ten sposób wyrażenia, np.:

zbiór wszystkich liczb x takich, że $x > y$

nie oznaczają żadnych określonych klas; są one raczej funkcjami oznaczeniowymi w sensie omówionym w § 2 – oznaczeniami klas stają się po zastąpieniu zawartych w nich zmiennych wolnych (ale, rzecz jasna, nie „ x ”) przez odpowiednie stałe; w przytoczonym tu wyrażeniu zmiennej „ y ” – np. przez „0”.*

* * *

O funkcji zdaniowej z jedną zmienną wolną mówi się często, że wyraża ona pewną własność przedmiotów – własność, przysługującą tym i tylko tym przedmiotom, które spełniają daną funkcję zdaniową (na przykład, funkcja zdaniowa „ x jest podzielne przez 2” wyraża pewną własność, mianowicie podzielność przez 2, lub parzystość). Klasa, która odpowiada tej funkcji, zawiera więc jako elementy wszystkie przedmioty, posiadające daną własność, a nie zawiera innych elementów. W ten sposób każdej własności przedmiotów można przyporządkować ściśle określoną klasę. I na odwrót – każdej klasie przyporządkowana jest pewna własność, przysługująca wyłącznie elementom tej klasy, mianowicie, własność przynależności do danej klasy. Stąd też, zdaniem wielu logików, można nie odróżniać tych obu pojęć. Innymi słowy, zbyteczna jest specjalna „teoria własności” – wystarczy teoria klas.

Jako zastosowanie powyższych uwag podamy tu nowe sformułowanie prawa LEIBNIZA. Pierwotne sformułowanie (w § 17) zawierało termin „własność”, w nowym, równoważnym sformułowaniu zastąpił go terminem „klasa”:

$x = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda klasa, której elementem jest jeden z przedmiotów x lub y , zawiera jako element również drugi z tych przedmiotów.

Z takiego sformułowania prawa LEIBNIZA widać, że pojęcie identyczności można zdefiniować za pomocą terminów teorii klas.

§23 Klasa pełna i klasa pusta

Jak już wiemy, dowolnej funkcji zdaniowej z jedną zmienną wolną odpowiada klasa wszystkich przedmiotów spełniających tę funkcję. Zasadę tę zastosujemy teraz do następujących dwóch szczególnych funkcji:

$$(I) \quad x = x, \quad x \neq x.$$

Pierwszą z tych funkcji spełnia niewątpliwie każde indywiduum (por. § 17). Odpowiadająca jej klasa,

$$\{x : x = x\},$$

zawiera więc jako elementy wszystkie indywidua. Klasę taką nazywamy KLASĄ PEŁNĄ i oznaczamy symbolem „**V**” (lub „1”). Z kolei, drugiej funkcji nie spełnia żadne indywiduum. Stąd, odpowiadająca jej klasa,

$$\{x : x \neq x\},$$

zwana KLASĄ PUSTĄ i oznaczana przez „ $\emptyset$ ” (lub przez „0”), nie zawiera żadnych elementów. Wobec tego wolno nam zastąpić funkcje zdaniowe w (I) dwiema równoważnymi funkcjami zdaniowymi o postaci ogólnej:

$$x \in K,$$

mianowicie:

$$(II) \quad x \in \mathbf{V}, \quad x \in \emptyset,$$

z których pierwsza spełniona jest przez każde indywiduum, drugiej natomiast nie spełnia żadne indywiduum.

Zamiast zajmować się wszystkimi indywiduami i określać, które z nich wchodzą w zakres konkretnej teorii matematycznej, wygodniej byłoby od początku ograniczyć rozważania do klasy indywiduów, związanych z daną teorią. Klasę taką ponownie oznaczmy przez „**V**” i będziemy nazywać DZIEDZINĄ TEORII. W arytmetyce dziedzinę teorii stanowi klasa wszystkich liczb.[†]

[†]To ważne pojęcie dziedziny teorii wprowadził do logiki DE MORGAN (por. ods. 6, str. 53). – Wcześniej natomiast datuje się pojęcie klasy pustej, które

* * *

Należy podkreślić, że V jest klasą wszystkich indywiduów, ale nie jest klasą zawierającą jako elementy wszystkie możliwe przedmioty, wśród nich klasy pierwszego rzędu, drugiego rzędu, itd. Powstaje pytanie, czy istnieje klasa wszystkich możliwych przedmiotów, a ogólniej, czy wolno nam rozważać klasy „niehomogeniczne”, czyli takie, które nie zaliczają się do konkretnego rzędu, natomiast zawierają jako elementy zarówno indywidua, jak klasy różnych rzędów. Pytanie to wiąże się ściśle z pewnymi zawiłymi problemami logiki współczesnej, mianowicie z tzw. ANTYNOMIĄ KLAS RUSSELLA oraz TEORIĄ TYPÓW LOGICZNYCH.^{2††} Omówienie ich przekroczyłoby zamierzone granice tej książki. Zauważymy tutaj tylko, że w całej matematyce (z wyjątkiem teorii mnogości), a tym bardziej w innych naukach, prawie nigdy nie pojawia się potrzeba rozważania klas „niehomogenicznych”.

§24 Podstawowe relacje między klasami

Między dwiema klasami K i L mogą zachodzić różne relacje. Może się, na przykład, zdarzyć, że każdy element klasy K jest zarazem elementem klasy L ; powiadamy wówczas, że klasa K jest PODKLASĄ KLASY L , lub że jest zawarta w L , lub, że klasa K pozostaje w RELACJI INKLUZJI Z KLASĄ L ; zaś o klasie L powiadamy, że ZAWIERA W SOBIE KLASĘ K JAKO PODKLASĘ (w analogicznych okolicznościach mówimy, że dany zbiór K jest PODZBIOREM zbioru L , itp.). Sytuację tę wyrażamy zwięźle jednym z dwóch poniższych wzorów:

$$K \subseteq L, \quad L \supseteq K.$$

występuje już w logice i filozofii średniowiecznej, w XIII i XIV wieku, kiedy to wyrażenia językowe poddawano wnikliwej analizie. (Por. w związku z tym § 18). Zajmowano się wówczas wyrażeniami definiującymi byty, które nie istnieją, a więc które (jakbyśmy dziś powiedzieli) wyznaczają klasę pustą.

²Pojęcie typu logicznego, wprowadzone przez RUSSELLA, przypomina pojęcie rzędu klasy; pojęcie typu można faktycznie otrzymać w wyniku uogólnienia pojęcia rzędu klasy – uogólnienia, które odnosi się nie tylko do klas, ale także innych przedmiotów, jak relacje (omówimy je w następnym rozdziale). Teorię typów logicznych wyłożono systematycznie w *Principia Mathematica* (por. ods. 1, str. 20).

^{††}Istnieją inne sposoby przedstawienia teorii zbiorów (czy też klas) – z ominięciem teorii typów logicznych i spojrzeniem na problemy, o których tu mowa, z innej perspektywy. Podejścia takie obecnie są preferowane; w podręcznikach rzadko się mówi o typach logicznych.

Mówiąc, że K jest podklasą L , nie wykluczamy możliwości, że L jest też podklasą K . Innymi słowy, K i L mogą być podklasami dla siebie nawzajem i mieć wszystkie elementy wspólne. W tym przypadku, jak wynika z prawa teorii klas (podanego niżej), K i L są identyczne. Jeżeli jednak stosunek odwrotny nie zachodzi, tzn. każdy element klasy K jest elementem klasy L , ale nie każdy element klasy L jest elementem klasy K , to mówimy, że klasa K jest **PODKLASĄ WŁAŚCIWĄ** lub **CZĘŚCIĄ KLASY L** , lub że klasa L **ZAWIERA W SOBIE K JAKO PODKLASĘ WŁAŚCIWĄ** lub **JAKO CZĘŚĆ**. I tak, zbiór wszystkich liczb całkowitych jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich liczb wymiernych, zaś prosta zawiera w sobie jako część każdy odcinek, leżący na tej prostej.[†]

Powiadamy, że dwie klasy K i L **ZACHODZĄ NA SIEBIE** lub **SIĘ KRZYŻUJĄ**, jeśli mają one co najmniej jeden element wspólny, przy czym każda z nich zawiera elementy, które nie należą do drugiej. Dwie klasy, które posiadają co najmniej po jednym elemencie (tj. jeśli nie są puste), ale nie mają elementu wspólnego, nazywamy **WZAJEMNIE SIĘ WYŁĄCZAJĄCYMI** lub **ROZŁĄCZNYMI**. Np. koło krzyżuje się z każdą prostą, poprowadzoną przez jego środek, ale jest rozłączne z każdą prostą, której odległość od środka jest większa niż promień koła. Zbiór wszystkich liczb dodatnich zachodzi na zbiór wszystkich liczb wymiernych, lecz zbiór liczb dodatnich i zbiór liczb ujemnych wzajemnie się wyłączają.

* * *

Podamy tu kilka przykładów praw, w których występują omówione wyżej relacje między klasami:

1. *Dla dowolnej klasy K , $K \subseteq K$.*
2. *Jeśli $K \subseteq L$ i $L \subseteq K$, to $K = L$.*
3. *Jeśli $K \subseteq L$ i $L \subseteq M$, to $K \subseteq M$.*

[†]Niekiedy dla wyrażenia, że klasa K jest podklasą właściwą klasy L , stosujemy następujący zapis:

$$K \subset L \quad \text{lub} \quad L \supset K.$$

Czytelnik może zwrócić uwagę na pewne analogie między wzorem „ $K \subset L$ ” a wzorem „ $x < y$ ” (drugi odnosi się do liczb) oraz między „ $K \subseteq L$ ” a „ $x \leq y$ ”. Analogia ta jednak nie jest pełna: niektóre wzory wyrażające nierówności między liczbami nie dają się przenieść na klasy.

4. *Jeśli K jest nie-pustą podklasą L , oraz jeśli klasy L i M są rozłączne, to klasy K i M są rozłączne.*

Pierwsze z tych twierdzeń nazywamy PRAWEM ZWROTNOŚCI dla inkluzji lub teorioklasowym PRAWEM IDENTYCZNOŚCI. Trzecie znane jest jako PRAWO PRZECHODNIOŚCI dla inkluzji; prawo trzecie razem z czwartym i innymi prawami o podobnej strukturze tworzą grupę twierdzeń, które nazywamy PRAWAMI SYLOGIZMU KATEGORYCZNEGO.

Z pojęciem inkluzji wiąże się charakterystyczną własność klasy pełnej i pustej, wyrażona przez następujące prawo:

$$\text{Dla dowolnej klasy } K, \quad \mathbf{V} \supseteq K \quad \text{ i } \quad \emptyset \subseteq K.$$

Twierdzenie to, a zwłaszcza jego druga część odnoszącą się do klasy pustej, wielu ludziom wydaje się nieco paradoksalna. By jej dowieść, rozważmy implikację:

$$\text{jeśli } x \in \emptyset, \text{ to } x \in K.$$

Otóż bez względu na to, jaki przedmiot podstawimy pod „ x ” i jaką klasę – pod K , poprzednik implikacji będzie zdaniem fałszywym, a cała implikacja – zdaniem prawdziwym (implikacja ta – jak niekiedy powiadają matematycy – jest spełniona „pusto”). Wolno nam zatem powiedzieć, że każdy element, który należy do klasy $\emptyset$, jest również elementem klasy K ; stąd zaś, na mocy definicji inkluzji wynika, że $\emptyset \subseteq K$. – W analogiczny sposób można dowieść pierwszej części tego prawa.

Łatwo widać, że między dwiema dowolnymi klasami musi zachodzić jedna i tylko jedna z rozważanych przez nas relacji. Wniosek ten wyraża szczegółowo następujące prawo:

Dla dowolnych klas K i L albo $K = L$, albo K jest podklasą właściwą L , albo K zawiera w sobie L jako podklasę właściwą, albo K i L się krzyżują, albo są one rozłączne, przy czym żadne dwa spośród wymienionych pięciu przypadków nie mogą zachodzić równocześnie.

Unaocznimy sobie to prawo, gdy pomyślimy o klasach K i L jako o figurach geometrycznych i wyobrazimy sobie wszelkie możliwe wzajemne położenia tych figur.

* * *

Relacje, z którymi mieliśmy do czynienia w tym paragrafie, nazywamy PODSTAWOWYMI RELACJAMI MIĘDZY KLASAMI.³

* * *

Starą tradycyjną logikę (por. § 6) można sprowadzić prawie całkowicie do teorii podstawowych relacji między klasami, a więc do małego fragmentu teorii klas. Zewnętrznie te dwie dyscypliny różnią się faktem, że w starej logice pojęcie klasy nie występuje wprost. W starej logice nie mówiło się, na przykład, że klasa koni jest zawarta w klasie ssaków, lecz że własność bycia ssakiem należy do wszystkich koni, lub prościej, że każdy koń jest ssakiem. Najważniejszymi prawami tradycyjnej logiki są prawa sylogizmu kategorycznego. Odpowiadają one dokładnie prawom z teorii klas, podobnym do podanych wyżej dwóch praw i odpowiednio nazwanym. Np. pierwsze z omawianych praw sylogizmu przyjmuje w starej logice następującą postać:

Jeśli każde M to P i każde S to M , to każde S to P .

Mamy tu najśłynniejsze prawo tradycyjnej logiki, znane jako prawo sylogizmu BARBARA.

§25 Działania na klasach

Zajmiemy się teraz pewnymi działaniami, w wyniku których – gdy wykonuje się je na danych klasach – powstają nowe klasy.

Mając dowolne dwie klasy K i L , możemy utworzyć nową klasę M , zawierającą jako elementy te i tylko te przedmioty, które należą bądź do klasy K , bądź do klasy L . Można by powiedzieć, że klasę M uzyskujemy przez dołączenie elementów klasy K do elementów klasy L . Działanie to nosi nazwę DODAWANIA KLAS, klasę M nazywamy SUMĄ KLAS K i L i oznaczamy symbolem:

$$K \cup L \quad (\text{lub } K + L).$$

Inne działanie na dwóch klasach K i L , zwane MNOŻENIEM KLAS polega na utworzeniu nowej klasy M , zawierającej jako elementy te i tylko te przedmioty, które należą zarówno do klasy K , jak L . Klasę M nazywa się ILOCZYNEM lub SKRZYŻOWANIEM KLAS K i L i oznacza symbolem:

³Jako pierwszy relacje te zbadał wyczerpująco matematyk francuski J. D. GERGONNE (1771–1859).

$$K \cap L \quad (\text{lub } K \cdot L).$$

Oba te działania często stosuje się w geometrii; niekiedy dogodnie jest posługiwać się nimi przy definiowaniu nowych rodzajów figur geometrycznych. Na przykład, wyobraźmy sobie, że wiemy już, co się rozumie przez parę dopełniających się kątów. W takim razie możemy zdefiniować pół-płaszczyznę – lub kąt prosty – jako sumę dwóch dopełniających się kątów (kąt traktujemy tu jako obszar kątowy, tj. jako część płaszczyzny ograniczonej przez dwie pół-proste, nazywane ramionami kąta). Lub, jeśli weźmiemy pod uwagę dowolne koło i kąt, którego wierzchołek leży w środku koła, to skrzyżowaniem tych dwóch figur jest figura, zwana wycinkiem kołowym.

Dodajmy jeszcze dwa przykłady z zakresu arytmetyki: sumą zbioru wszystkich liczb dodatnich i zbioru wszystkich liczb ujemnych jest zbiór wszystkich liczb różnych od 0; skrzyżowaniem zbioru wszystkich liczb parzystych i zbioru wszystkich liczb pierwszych jest zbiór, zawierający tylko jeden element – liczbę 2, bowiem liczba ta jest jedyną parzystą liczbą pierwszą.[†]

* * *

Dodawaniem i mnożeniem klas rządzą rozmaite prawa. Niektóre z nich są w pełni analogiczne do pewnych praw arytmetyki, dotyczących dodawania i mnożenia liczb – stąd właśnie wzięły się terminy „*dodawanie klas*” i „*mnożenie klas*”. Jako ich przykłady przytoczymy PRAWO PRZEMIENNOŚCI i PRAWO ŁĄCZNOŚCI dla dodawania i mnożenia klas:

Dla dowolnych klas K i L , $K \cup L = L \cup K$ i $K \cap L = L \cap K$.

Dla dowolnych klas K , L i M , $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap M$ i $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup M$.

Analogia z odpowiednimi prawami arytmetyki staje się oczywista, kiedy symbole „ $\cup$ ” i „ $\cap$ ” zastąpimy zwykłymi znakami dodawania i mnożenia, „ $+$ ” i „ $\cdot$ ”.

Inne prawa jednakże odbiegają znacznie od praw arytmetyki; charakterystycznego przykładu dostarcza tu PRAWO TAUTOLOGII:

Dla dowolnej klasy K , $K \cup K = K$ i $K \cap K = K$.

[†]Przypominamy, że liczba pierwsza to liczba naturalna (por. odsyłacz na str. 51), większa od jeden i podzielna tylko przez jeden i przez siebie.

Prawo to staje się oczywiste, gdy uświadomimy sobie sens symboli „ $K \cup K$ ” i „ $K \cap K$ ”; dołączając do elementów klasy K elementy tej samej klasy, nie przez to właściwie nie dodajemy, a więc w wyniku otrzymujemy znowu klasę K .

* * *

Chcemy wspomnieć o jeszcze jednym działaniu, które tym się różni od dodawania i mnożenia, że wykonujemy je nie na dwóch, ale na jednym zbiorze. Jeśli mamy daną klasę K , to działanie to sprowadza się do utworzenia tzw. UZUPEŁNIENIA lub DOPEŁNIENIA KLASY K , które jest klasą wszystkich przedmiotów nie należących do K . Uzupełnienie klasy K oznacza się przez:

$$K'.$$

Na przykład, jeśli klasa K jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a dziedziną teorii – zbiór liczb rzeczywistych, to wszystkie ułamki właściwe i wszystkie liczby niewymierne należą do zbioru K' .

Jako przykłady praw, które rządzą pojęciem uzupełnienia i ustalają jego związek z rozważanymi wcześniej pojęciami podstawowymi, podamy następujące dwa twierdzenia:

Dla dowolnej klasy K , $K \cup K' = \mathbf{V}$.

Dla dowolnej klasy K , $K \cap K' = \emptyset$.

Pierwsze z tych twierdzeń nazywamy teorioklasowym PRAWEM WYŁĄCZONEGO ŚRODKA, drugie zaś – teorioklasowym PRAWEM SPRZECZNOŚCI.^{††}

^{††}Oba te prawa są bezpośrednimi odpowiednikami praw rachunku zdaniowego o analogicznych nazwach: „ $p \vee \sim p$ ”, „ $\sim(p \wedge \sim p)$ ”. W istocie, można łatwo sprawdzić, że podane wyżej prawa teorioklasowe wynikają wprost ze wspomnianych tu dwóch praw. (Patrz też: ćwiczenie *14.) – Przy tej okazji wróćmy do wcześniejszego tematu, mianowicie, do ogólnych rozważań o zdaniach w rozdziale II. Podstawowym milczącym ich założeniem jest to, że dane zdanie musi być prawdziwe lub fałszywe. Można by zatem powiedzieć, że te dwa prawa rachunku zdaniowego cofają nas do początkowych przesłanek. Rzecz jasna, rozważano zdania, których prawdziwość lub fałszywość wydają się nieokreślone; powiedzmy, zdania odnoszące się do wydarzeń w przyszłości. Wtedy wątpliwa też staje się ważność prawa wyłączzonego środka. – W tym kontekście interesujące może być to, że warianty alternatywy prawdziwy-fałszywy rozstrząsano nie tylko w dysputach filozoficznych, ale również w teoriach logicznych. Zmodyfikowano ówczesny rachunek zdaniowy, by dopuścić trzy lub więcej wartości logiczne (por. § 13; jako pierwszy teorie takie proponował ŁUKASIEWICZ, wspominany w odsyłaczu na str. 20). W zasadzie teoriami tymi można by objąć np. algebrę klas; należałoby wówczas zmodyfikować rozmaite teorioklasowe prawa, np. teorioklasowe prawo wyłączzonego środka. W praktyce jednak alternatywa prawdy i fałszu pozostaje standardową podstawą logiki i matematyki.

* * *

Relacje między klasami i działania na klasach, z którymi się zapoznaliśmy, a także pojęcia klasy pełnej i klasy pustej, stanowią przedmiot badań odrębnej gałęzi teorii klas; jest ona określana jako ALGEBRA KLAS lub RACHUNEK KLAS, ponieważ prawa, dotyczące tych relacji i działań, mają charakter prostych formuł, przypominających wzory rachunku arytmetycznego.

§26 Klasy równoliczne, liczba kardynalna klasy, klasy skończone i nieskończone; arytmetyka jako część logiki

*Wśród pozostałych pojęć, które stanowią przedmiot teorii klas, na baczność uwagę zasługuje grupa, złożona z takich pojęć, jak klasy równoliczne, liczba kardynalna klasy, klasy skończone i nieskończone. Niestety, są to pojęcia trudne i możemy omówić je tu tylko pobieżnie.

* * *

Jako przykład dwóch KLAS RÓWNOLICZNYCH lub RÓWNOWAŻNYCH, mogą służyć zbiory palców prawej i lewej dłoni. Zbiory te są równoliczne, jako że palce obu dłoni dają się połączyć w pary, przy czym: (i) każdy palec należy tylko do jednej pary; (ii) każda para zawiera tylko jeden palec lewej i jeden palec prawej dłoni. W analogicznym sensie równoliczne są trzy następujące zbiory: zbiór wszystkich wierzchołków, zbiór wszystkich boków oraz zbiór wszystkich kątów danego wieloboku. Później, w paragrafie 33, będziemy w stanie podać dokładną i ogólną definicję pojęcia klas równolicznych.

Weźmy teraz pod uwagę dowolną klasę K . Otóż istnieje pewna własność, która przysługuje wszystkim klasom równolicznym z K , a nie przysługuje żadnym innym klasom, mianowicie, własność równoliczności z klasą K . Własność tę nazywamy LICZBĄ KARDYNALNĄ KLASY K , jej MOCĄ lub LICZBĄ ELEMENTÓW. Można wyrazić to zwięźle i ściślej, ale nieco abstrakcyjnie mówiąc, że liczba kardynalna klasy K jest to klasa wszystkich klas równolicznych z K (przy czym należy dodać, że liczba kardynalna jest klasą drugiego rzędu zawierającą jako elementy klasy pierwszego rzędu). W szczególności oznacza to, że dwie klasy (pierwszego rzędu) K i L mają tę samą liczbę kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy są równoliczne.

Ze względu na liczbę elementów, klasy dzielimy na skończone i nieskończone; wśród pierwszych wyróżniamy klasy nie zawierające żadnych elementów, klasy składające się z jednego, dwóch, trzech elementów, itd. Pojęcia te najłatwiej zdefiniować na gruncie arytmetyki. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną (tj. nie-ujemną liczbą całkowitą). Powiemy, że KLASA K SKŁADA SIĘ Z n ELEMENTÓW, jeśli K jest równoliczna z klasą wszystkich liczb naturalnych mniejszych niż n . I tak, klasa składa się z 2 elementów, jeśli jest równoliczna z klasą wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 2, czyli z klasą składającą się z liczb 0 i 1. Podobnie, klasa składa się z trzech elementów, jeśli jest równoliczna z klasą zawierającą jako elementy liczby 0, 1 i 2. Ogólnie, klasę K nazywamy SKOŃCZONĄ, jeśli istnieje liczba naturalna n taka, że klasa K zawiera n elementów; w przeciwnym razie klasę nazywamy NIESKOŃCZONĄ.

Możliwa jest również inna metoda postępowania. Okazuje się, że wszystkie rozważane ostatnio terminy dają się zdefiniować za pomocą terminów czysto logicznych, bez odwoływania się do pojęć z zakresu arytmetyki. Np. możemy powiedzieć, że klasa K składa się z jednego tylko elementu, jeśli klasa ta spełnia następujące dwa warunki: (i) istnieje x takie, że $x \in K$; (ii) dla dowolnego y i z , jeśli $y \in K$ i $z \in K$, to $y = z$ (przy czym można zastąpić je jednym warunkiem: „*istnieje dokładnie jedno x takie, że $x \in K$* ”; por. § 20).[†] W analogiczny sposób definiujemy zwroty: „*klasa K składa się z dwóch elementów*”, „*klasa K składa się z trzech elementów*”, itd. Zagadnienie staje się znacznie trudniejsze, kiedy przychodzi nam zdefiniować terminy „*klasa skończona*” i „*klasa nieskończona*”, ale również w tych przypadkach udało się je pomyślnie rozwiązać (por. § 33), tak, że wszystkie rozważane pojęcia weszły w zakres logiki.

Okazuje się, że okoliczność ta pociąga za sobą niezmiernie ciekawą i doniosłą konsekwencję; mianowicie, samo pojęcie liczby oraz wszystkie inne pojęcia z zakresu arytmetyki dają się zdefiniować na gruncie logiki. Rzeczywiście, łatwo jest ustalić sens symboli, oznaczających poszczególne liczby naturalne, takie jak „0”, „1”, „2” itd. Na przykład liczbę 1 można zdefiniować, jako liczbę elementów – czy

[†]W tym miejscu zwróćmy uwagę na to, że tu i nie tylko tu trzeba odróżniać przedmiot od jedno-elementowej klasy, której elementem jest dany przedmiot; takie jednoelementowe klasy niekiedy nazywa się SINGLETONAMI. Zauważmy zwłaszcza, że dziedzinę teorii stanowi zbiór wszystkich indywidualnych przedmiotów, podczas gdy zbiór odpowiednich singletonów jest zbiorem drugiego rzędu, który możemy tu oznaczyć zwrotem: „*liczba kardynalna jeden*”.

też, jako liczbę kardynalną – klasy, która składa się z jednego elementu. (Definicja taka wydaje się niepoprawna i pozornie zawiera błędne koło, jako że słowo „jeden”, które jest definiowane, występuje w definiensie. Naprawdę jednak żadnego błędu nie ma, ponieważ zwrot „*składa się z jednego elementu*” traktujemy jako całość, a sens tej całości wyjaśniliśmy już wcześniej.) Nietrudno też zdefiniować ogólne pojęcie liczby naturalnej: liczba naturalna jest to liczba kardynalna klasy skończonej. Umiemy następnie zdefiniować wszystkie działania na liczbach naturalnych, jesteśmy w stanie rozszerzyć pojęcie liczby przez wprowadzenie ułamków, liczb ujemnych, niewymiernych, nie wykraczając przy tym ani na chwilę poza granice logiki. Więcej, potrafimy uzasadnić wszystkie twierdzenia arytmetyki, opierając się wyłącznie na prawach logiki (trzeba tylko w tym celu wzbogacić układ praw logicznych jednym zdaniem, które intuicyjnie jest mniej oczywiste od innych, mianowicie tak zwanym AKSJOMATEM NIESKOŃCZONOŚCI, który orzeka, że istnieje nieskończenie wiele różnych przedmiotów^{††}). Cała ta konstrukcja jest bardzo abstrakcyjna, niełatwo ją spopularyzować i nie nadaje się ona do elementarnego wykładu arytmetyki. W książce nie staramy się przystosować do tej koncepcji, liczby zaś traktujemy jako indywidua, a nie jako własności, czy też klasy klas. *Sam jednak fakt, że dało się ugruntować całą arytmetykę wraz ze wszystkimi opartymi na niej naukami – algebrą, rachunkiem różniczkowo-całkowym, analizą matematyczną itd. – jako dział czystej logiki, przedstawia jedną z najpiękniejszych zdobyczy badań logicznych.*^{4*}

Ćwiczenia

1. Niech K będzie zbiorem wszystkich liczb mniejszych od $\frac{3}{4}$. Które z następujących wzorów są prawdziwe:

$$0 \in K, \quad 1 \in K, \quad \frac{2}{3} \in K, \quad \frac{3}{4} \in K, \quad \frac{4}{5} \in K?$$

^{††}Ścisłejsze sformułowanie aksjomatu nieskończoności brzmi następująco: *Istnieje nieskończony zbiór*. Innymi słowy, nie tylko potrzebujemy nieskończenie wiele różnych przedmiotów, ale musimy również być w stanie utworzyć z nich zbiór (który z kolei będzie podlegał prawom ogólnej teorii zbiorów).

⁴Podstawowe idee w tym zakresie pochodzą od FREGEGO (por. ods. 2, str. 20), który rozwinął je po raz pierwszy w interesującej książce *Die Grundlagen der Arithmetik* (Breslau 1884). Idee FREGEGO zostały zrealizowane w sposób systematyczny i wyczerpujący przez WHITEHEADA i RUSSELLA w *Principia Mathematica* (por. ods. 1, str. 20).

2. Rozważamy następujące cztery zbiory:

- (a) zbiór wszystkich liczb dodatnich,
- (b) zbiór wszystkich liczb mniejszych od 3,
- (c) zbiór wszystkich liczb x takich, że $x + 5 < 8$,
- (d) zbiór wszystkich liczb x spełniających funkcję zdaniową „ $x < 2x$ ”.

Które z tych zbiorów są identyczne, a które – różne?

3. Jak nazywamy w geometrii zbiór wszystkich punktów w przestrzeni, których odległość od danego punktu (względnie od danej prostej) nie jest większa od danego odcinka?

4. Niech K i L będą dwoma koncentrycznymi kołami, przy czym promień pierwszego niech będzie mniejszy od promienia drugiego. Która z relacji omawianych w § 24 zachodzi między tymi kołami? Czy ta sama relacja zachodzi między okręgami tych kół?

5. Narysować dwa kwadraty K i L w ten sposób, by spełniony był po kolei każdy z następujących warunków:

- (a) $K = L$,
- (b) kwadrat K jest częścią kwadratu L ,
- (c) kwadrat K zawiera w sobie kwadrat L jako część,
- (d) kwadraty K i L się pokrywają,
- (e) kwadraty K i L są rozłączne.

Które z tych przypadków nie zachodzą, jeśli (i) kwadraty muszą być przystające; (ii) jeśli weźmiemy pod uwagę nie kwadraty lecz ich obwody.

6. Niech x i y będą dwiema dowolnymi liczbami, przy czym niech $x < y$. Pamiętamy, że zbiór liczb, które nie są mniejsze od x i nie są większe od y nosi nazwę PRZEDZIAŁU (dokładniej, PRZEDZIAŁU DOMKNIĘTEGO) o końcach x i y i oznaczamy go symbolem „ $[x, y]$ ”.

Które z poniższych wzorów są poprawne (tj. prawdziwe)?

- (a) $[3, 5] \subseteq [3, 6]$,

(b) $[4, 7] \subseteq [5, 10]$,

(c) $[-2, 4] \supseteq [-3, 5]$,

(d) $[-7, 1] \supseteq [-5, -2]$.

Które z podstawowych relacji zachodzą między danymi przedziałami w następujących przykładach?

(e) $[2, 4]$ i $[5, 8]$,

(f) $[3, 6]$ i $[3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}]$,

(g) $[1\frac{1}{2}, 7]$ i $[-2, 3\frac{1}{2}]$.

7. Czy następujące zdanie (które ma tę samą strukturę, co prawa sylogizmu kategorycznego, podane w § 24) jest prawdziwe?

*dla dowolnych klas K , L i M ,
jeśli K jest rozłączna z L i L jest rozłączna z M ,
to K jest rozłączna z M .*

8. Przetłumaczyć następujące wzory na zwykły język:

(a) $x = y \leftrightarrow \forall_K(x \in K \leftrightarrow y \in K)$,

(b) $K = L \leftrightarrow \forall_x(x \in K \leftrightarrow x \in L)$.

Które z praw wspomnianych w §§ 22 i 24 są wyrażone tymi wzorami? Jakie zmiany należałoby wprowadzić po obu stronach równoważności (b), by otrzymać definicje symboli „ $\subseteq$ ” i „ $\supseteq$ ”?

9. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, a D dowolnym punktem leżącym na odcinku BC . Jakie figury powstaną z sumy dwóch trójkątów ABD i ACD oraz z ich iloczynu? Odpowiedź wyrazić wzorami.

10. Przedstawić dowolny kwadrat jako:

(a) sumę dwóch trapezoidów,

(b) skrzyżowanie dwóch trójkątów.

11. Które z poniższych wzorów są prawdziwe (por. z ćwiczeniem 6)?

(a) $[2, 3\frac{1}{2}] \cup [3, 5] = [2, 5]$,

$$(b) [-1, 2] \cup [0, 3] = [0, 2],$$

$$(c) [-2, 8] \cap [3, 7] = [-2, 8],$$

$$(d) [2, 4\frac{1}{2}] \cap [3, 5] = [2, 3].$$

We wzorach błędnych poprawić wyrażenia, stojące po prawej stronie znaku „=”.

12. Niech K i L będą dwiema dowolnymi klasami. Jakimi klasami są $K \cup L$ i $K \cap L$ w przypadku $K \subseteq L$? W szczególności, jakimi klasami są $K \cup \mathbf{V}$, $K \cap \mathbf{V}$, $\emptyset \cup L$ oraz $\emptyset \cap L$?

Wskazówka: Odpowiadając na drugie pytanie, należy pamiętać o podanym w § 24 prawie dotyczącym klas $\mathbf{V}$ i $\emptyset$.

13. Spróbować wykazać, że dowolne klasy K , L i M spełniają następujące wzory:

$$(a) K \subseteq K \cup L \text{ i } K \supseteq K \cap L,$$

$$(b) K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M) \text{ i } \\ K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M),$$

$$(c) (K')' = K,$$

$$(d) (K \cup L)' = K' \cap L' \text{ i } (K \cap L)' = K' \cup L'.$$

Wzory (a) nazywamy PRAWAMI SYMPLIFIKACJI (dla dodawania i mnożenia klas); wzory (b) są PRAWAMI ROZDZIELNOŚCI (dla mnożenia klas względem dodawania i dla dodawania względem mnożenia); wzór (c) jest PRAWEM PODWÓJNEGO UZUPEŁNIENIA; natomiast wzory (d) są teorioklasowymi PRAWAMI DE MORGANA.⁵ Które z tych praw są odpowiednikami praw arytmetyki?

Wskazówka: Aby udowodnić np. pierwszy z wzorów (d), wystarczy wykazać, że klasy $(K \cup L)'$ i $K' \cap L'$ składają się całkowicie z tych samych elementów (por. § 24). Do tego celu potrzebujemy definicji z § 25, a ponadto musimy sobie wyjaśnić, kiedy przedmiot x należy do klasy $(K \cup L)'$, kiedy zaś do $K' \cap L'$.

***14.** Między prawami rachunku zdaniowego podanymi w §§ 12 i 13 oraz w ćwiczeniu 14 w rozdziale II z jednej strony, a prawami algebry klas podanymi w §§ 24 i 25 oraz w poprzednim ćwiczeniu – z drugiej, zachodzi daleko idące podobieństwo struktur (wykazane

⁵por. ods. 6, str. 53.

również przez analogię ich nazw). Opisać szczegółowo, gdzie leży to podobieństwo i popробować znaleźć ogólne wyjaśnienie tego zjawiska.

W § 14 zapoznaliśmy się z prawem kontrapozycji rachunku zdaniowego; sformułować analogiczne prawo dla algebry klas.

15. Używając zapisu:

$$\{x : \dots\}$$

wprowadzonego w § 22, możemy zapisać definicję sumy dwóch klas w następujący sposób:

$$K \cup L = \{x : x \in K \vee x \in L\};$$

ale również jest możliwe podać tę definicję w zwykłej postaci równoważności (bez użycia tego zapisu):

$$[x \in (K \cup L)] \leftrightarrow [x \in K \vee x \in L].$$

Sformułować analogicznymi dwoma sposobami definicję klasy pełnej, klasy pustej, iloczynu klas i uzupełnienia klasy.

16. Różnica dwóch danych klas K i L , wyrażona za pomocą symboli: $K - L$, jest klasą M zdefiniowaną wzorem:

$$M = \{x : x \in K \wedge \sim (x \in L)\}.$$

Jeśli K jest klasą wszystkich liczb całkowitych, a L – klasą ujemnych liczb całkowitych, to czym są $K - L$ i $L - K$? Które z następujących wzorów są spełnione przez wszystkie klasy?

$$(K - L) \cup L = K \cup L, \quad K - (K - L) = L, \\ \text{i} \quad L - (K - L) = L?$$

***17.** Czy istnieje taki wielobok, w którym zbiór wszystkich boków jest równoliczny ze zbiorem wszystkich przekątnych?

***18.** Jan pracuje w poniedziałki, środy i piątki, Piotr natomiast pracuje w poniedziałki, wtorki, środy i czwartki. Niech K będzie zbiorem dni pracy Jana, L zaś – zbiorem dni pracy Piotra. Jaki procent liczby elementów $K \cup L$ jest w $K \cap L$? Odpowiedzieć na to samo pytanie, zastępuwszy $K \cap L$ przez $K - L$ (patrz ćwiczenie 16).

***19.** Następujące dwa wyrażenia zapisać równoważnymi wzorami, używając wyłącznie symboli logicznych:

- (a) *klasa K składa się z dwóch elementów,*
- (b) *klasa K składa się z trzech elementów.*

***20.** Które z następujących zbiorów są skończone, a które – nieskończone?

- (a) zbiór wszystkich liczb naturalnych x takich, że $0 < x$ i $x < 4$,
- (b) zbiór wszystkich liczb wymiernych x takich, że $0 < x$ i $x < 4$,
- (c) zbiór wszystkich liczb niewymiernych x takich, że $0 < x$ i $x < 4$.

21. Dla każdego z następujących wyrażeń określić, czy jest ono zdaniem, funkcją zdaniową, oznaczeniem (inaczej, nazwą) czy funkcją oznaczeniową (nazwową) i podać, które zmienne występują jako wolne, a które jako związane:

- (a) $\{x : x^2 = 9 \wedge 0 < x\}$,
- (b) $\forall_{K,L}(K \subseteq L' \rightarrow \exists_z[z \in K \wedge \sim (z \in L)])$,
- (c) $K \cup \{y : y \in L \wedge \sim (y \in K)\}$,
- (d) $9 \in \{x : \exists_y(x = y^2)\}$.

V

O teorii relacji

§27 Relacje, ich dziedziny i przeciwdziedziny; relacje i funkcje zdaniowe z dwiema zmiennymi wolnymi

Już w poprzednich rozdziałach była mowa o kilku RELACJACH między przedmiotami. Przykładami relacji zachodzących między dwoma przedmiotami, może być identyczność (równość) i różność. I tak, wzór:

$$x = y$$

odczytuje się czasami:

x pozostaje w relacji identyczności z y

lub:

między x i y zachodzi relacja identyczności,

a o symbolu „=” mówi się, że oznacza relację identyczności. Analogicznie, wzór:

$$x \neq y$$

odczytamy czasem:

x pozostaje w relacji różności z y

lub:

między x i y zachodzi relacja różności,

a o symbolu „ $\neq$ ” powiemy, że oznacza relację różności. Zetknęliśmy się ponadto z pewnymi innymi relacjami, które zachodzą między klasami – relacjami zawierania się, krzyżowania się i rozłączności. Omówimy teraz pewne pojęcia z zakresu TEORII RELACJI, stanowiącej odrębny, bardzo ważny dział logiki; w teorii tej rozważa się relacje o dowolnym charakterze i ustala ogólne prawa, które ich dotyczą.¹

Dla ułatwienia rozważań wprowadzamy specjalne zmienne: „ R ”, „ S ”, . . . , które służą do oznaczenia relacji. Zamiast zwrotów:

przedmiot x pozostaje w relacji R z przedmiotem y

oraz:

przedmiot x nie pozostaje w relacji R z przedmiotem y

będziemy używać odpowiednio symbolicznych skrótów:

$$xRy \quad i \quad \sim(xRy)$$

(wykorzystując znak negacji z rachunku zdaniowego, por. § 13); będziemy też posługiwać się skrótowymi zwrotami w rodzaju: „*relacja R zachodzi między x i y* ”.

Jeśli przedmiot x pozostaje w relacji R z przedmiotem y , to x nazywamy POPRZEDNIKIEM RELACJI R , zaś przedmiot y , dla którego istnieje przedmiot x taki, że

$$xRy$$

nosi nazwę NASTĘPNIKA RELACJI R . Klasa wszystkich poprzedników relacji R znana jest jako DZIEDZINA, zaś klasa wszystkich następników – jako PRZECIWDZIEDZINA (lub DZIEDZINA ODWROTNA) RELACJI R .[¶] Na przykład każde indywiduum jest równocześnie poprzednikiem i następnikiem relacji identyczności, a zatem zarówno dziedziną, jak przeciwdziedziną tej relacji jest klasa pełna.

* * *

¹Teoria relacji, a zwłaszcza dział znany jako algebra relacji (por. § 28), zawdzięcza swe powstanie DE MORGANOWI i PEIRCE’OWI (por. odnośnik 6 na str. 53 i odnośnik 2 na str. 14), których prace rozwinął i dokończył niemiecki logik E. SCHRÖDER (1841–1902). *Algebra und Logik der Relative* (Leipzig 1895) SCHRÖDERA, trzeci tom jego dzieła *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, do dziś jest jedynym wyczerpującym ujęciem algebry relacji.

[¶]Dziedzina i przeciwdziedzina bywają też nazywane, odpowiednio, LEWĄ i PRAWĄ DZIEDZINĄ (przyp. tłum.).

W teorii relacji – podobnie jak w teorii klas – możemy wyróżnić relacje różnych rzędów. RELACJAMI PIERWSZEGO RZĘDU są relacje, które zachodzą między indywiduami. RELACJE DRUGIEGO RZĘDU zachodzą między przedmiotami – klasami lub relacjami – pierwszego rzędu, itd. Mamy tu do czynienia z sytuacją nieco bardziej skomplikowaną, bowiem często przychodzi nam rozważać relacje „mieszane”, w których poprzednikami są, powiedzmy, indywidua, następnikami zaś – klasy; czy też takie relacje, że poprzednikami są klasy pierwszego rzędu, a następnikami – klasy drugiego rzędu. Najważniejszym przykładem relacji tego rodzaju jest relacja między elementem a klasą, do której element ów należy; jak pamiętamy z § 21, relację taką oznaczamy symbolem „ $\in$ ”. – Podobnie jak w przypadku klas, rozważać będziemy przede wszystkim relacje pierwszego rzędu, ale pojęcia przez nas omówione dadzą się zastosować również do relacji wyższych rzędów, co też kilkakrotnie wykonamy.

* * *

Przyjmujemy, że każdej funkcji zdaniowej o dwóch zmiennych wolnych „ x ” i „ y ” odpowiada pewna relacja, która zachodzi między danym przedmiotem x a danym przedmiotem y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y spełniają daną funkcję zdaniową. O funkcji zdaniowej ze zmiennymi wolnymi – tu: „ x ” i „ y ” – mówi się wtedy, że wyraża pewną relację. Na przykład funkcja zdaniowa:

$$x + y = 0$$

wyraża relację posiadania przeciwnego znaku, lub krócej – relację przeciwieństwa; inaczej mówiąc, liczby x i y są w relacji przeciwieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $x + y = 0$. Jeśli relację tę oznaczymy symbolem „ $\mathcal{P}$ ”, to wzory:

$$x\mathcal{P}y$$

oraz

$$x + y = 0$$

są sobie równoważne. W analogiczny sposób możemy znaleźć odpowiednią relację dla dowolnej funkcji zdaniowej, której jedyne zmienne wolne oznaczone są symbolami „ x ” i „ y ” i przekształcić tę funkcję w równoważny jej wzór postaci:

$$xRy$$

gdzie zamiast „ R ” występuje symbol stały, będący nazwą owej relacji. Wzór:

$$xRy$$

możemy zatem uważać za ogólną postać funkcji zdaniowej o dwóch zmiennych wolnych, podobnie jak wzór:

$$x \in K$$

przedstawia ogólną postać funkcji z jedną zmienną wolną (por. § 22).

§28 Algebra relacji

Teoria relacji tworzy bardzo rozwiniętą gałąź logiki matematycznej. Jeden z jej działów, ALGEBRA (lub RACHUNEK) RELACJI przypomina rachunek klas, zaś głównym jego celem jest ustalenie praw formalnych, rządzących działaniami, za pomocą których można z danych relacji tworzyć inne.

* * *

W algebrze relacji rozważamy przede wszystkim grupę pojęć, które – oznaczone zwykle przez te same symbole i podlegające tym samym prawom – są dokładnymi odpowiednikami pojęć z zakresu algebry klas. (By uniknąć dwuznaczności, oczywiście, moglibyśmy w algebrze relacji zastosować inne symbole – na przykład nad symbolami algebry klas umieścić kropkę.)

Mamy zatem w algebrze relacji dwie szczególne relacje – RELACJĘ UNIWERSALNĄ $\mathbf{V}$ oraz RELACJĘ PUSTĄ $\emptyset$, przy czym pierwsza z nich zachodzi między dwoma dowolnymi indywiduami, druga zaś nie zachodzi między żadnymi elementami rozważanej klasy.

Poza tym mamy rozmaite relacje między relacjami, np. RELACJĘ INKLUZJI, czyli ZAWIERANIA. Mówimy, że relacja R jest ZAWARTA w relacji S , a symbolicznie:

$$R \subseteq S,$$

jeśli między dwoma przedmiotami zawsze zachodzi S , o ile zachodzi między nimi R ; innymi słowy, jeśli dla dowolnego x i y wzór:

$$xRy$$

pociąga za sobą:

$$xSy.$$

Na przykład z arytmetyki wiemy, że ilekroć

$$x < y,$$

to

$$x \neq y;$$

zatem relacja mniejszości zawarta jest w relacji różności.

Jeśli równocześnie

$$R \subseteq S \quad \text{ i } \quad S \subseteq R,$$

innymi słowy, jeśli dla tych samych par przedmiotów zachodzą relacje R i S , to relacje te są identyczne:

$$R = S.$$

Następnie mamy SUMĘ DWÓCH RELACJI R i S , symbolicznie:

$$R \cup S,$$

oraz ILOCZYN lub SKRZYŻOWANIE R i S , symbolicznie:

$$R \cap S.$$

Suma relacji, $R \cup S$, zachodzi między dwoma przedmiotami wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między nimi przynajmniej jedna z relacji R lub S ; innymi słowy wzór:

$$x(R \cup S)y$$

jest równoważny warunkowi:

$$xRy \quad \text{ lub } \quad xSy.$$

Podobnie definiuje się iloczyn dwóch relacji, z tą różnicą, że zamiast spójnika *lub* używa się *i*. Na przykład, jeśli R jest relacją ojcostwa (tj. relacją, która zachodzi między dwiema osobami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest ojcem y 'a), zaś S jest relacją macierzyństwa, to $R \cup S$ jest relacją rodzicielstwa, podczas gdy $R \cap S$ jest – w tym przypadku – relacją pustą.

Mamy również NEGACJĘ lub UZUPEŁNIENIE RELACJI R , oznaczone przez:

$$R'.$$

Relacja ta zachodzi między dwoma przedmiotami wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi między nimi relacja R ; inaczej mówiąc, dla dowolnego x i y równoważne są następujące wzory:

$$xR'y \text{ i } \sim (xRy).$$

Zauważmy, że jeśli relację oznacza symbol stały, to jej uzupełnienie często oznacza tenże symbol przekreślony pionową lub ukośną kreską. Na przykład negację relacji $<$ zwykle symbolizuje „ $\nless$ ” lub „ $\lless$ ” (nie zaś „ $<'$ ”).

* * *

W algebrze relacji występują też zupełnie nowe pojęcia, nie mające odpowiedników w algebrze klas.

Mamy tu, po pierwsze, dwie szczególne relacje: IDENTYCZNOŚCI i RÓŻNOŚCI między indywiduami (zresztą już nam znane z wcześniejszych rozważań).[†] W algebrze relacji oznacza się je specjalnymi symbolami lub literami, np. „ $\mathcal{I}$ ” i „ $\mathcal{R}$ ”, a nie symbolami „ $=$ ” i „ $\neq$ ”, używanymi gdzie indziej. Piszemy zatem:

$$x\mathcal{I}y \text{ i } x\mathcal{R}y$$

zamiast:

$$x = y \text{ i } x \neq y.$$

Symboli „ $=$ ” i „ $\neq$ ” używa się w algebrze relacji wyłącznie do oznaczenia identyczności i różności między relacjami.

Następnie mamy bardzo interesujące i ważne nowe działanie, za pomocą którego z dwóch relacji R i S tworzymy trzecią relację, zwaną ILOCZYNEM WZGLĘDNYM lub ZŁOŻENIEM R i S (zwykły iloczyn dla odróżnienia bywa nazywany ILOCZYNEM BEZWZGLĘDNYM). Iloczyn względny R i S oznaczamy symbolem:

$$R | S;$$

relacja ta zachodzi między dwoma przedmiotami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt z taki, że jednocześnie mamy:

[†] Powinniśmy skomentować wprowadzone tu terminy. Otóż zgodnie z tym, co powiedziano w rozdziale III, *identyczność* i *równość* uważamy za tę samą relację. Odpowiednim terminem w odniesieniu do relacji uzupełnienia jest „*różność*”, jak w tekście. Pojęcia *różności* w żadnym wypadku nie należy mylić z pojęciem *nierówności*, które wprowadzimy później (w § 46), a które wymaga znajomości specyficznych pojęć arytmetycznych.

$$xRz \quad \text{i} \quad zSy.$$

Na przykład, jeśli R jest relacją bycia mężem, a S – relacją bycia córką, to między dwiema osobami x i y zachodzi relacja $R \mid S$, o ile istnieje osoba z taka, że x jest mężem z 'a i z jest córką y 'a; relacja $R \mid S$ jest więc relacją bycia zięciem. – Istnieje ponadto inne działanie o podobnym charakterze, którego wynik nazywamy SUMĄ WZGLĘDNĄ DWÓCH RELACJI. Działanie to nie odgrywa większej roli i nie będziemy go tu omawiać.

Wreszcie, mamy działanie, które dotyczy tylko jednej relacji R i wobec tego przypomina tworzenie R' ; w wyniku tego działania otrzymujemy nową relację, zwaną KONWERSEM i oznaczaną przez:

$$\check{R}.$$

Relacja $\check{R}$ zachodzi między x i y wtedy i tylko wtedy, gdy R zachodzi między y i x . Jeśli relację oznaczamy stałym symbolem, to dla oznaczenia jej konwersu często stosujemy ten sam symbol, lecz napisany w przeciwnym kierunku. Na przykład konwersem relacji $<$ jest relacja $>$, ponieważ dla dowolnego x i y wzory:

$$x < y \quad \text{i} \quad y > x$$

są równoważne.^{††}

* * *

Ze względu na dość specjalny charakter algebry relacji, nie będziemy wchodzić w jego dalsze szczegóły.

§29 Kilka rodzajów relacji

Zajmiemy się teraz tym działem teorii relacji, którego zadaniem jest opisanie i zbadanie różnych rodzajów relacji (i ich specjalnych własności), zwłaszcza rodzajów relacji często spotykanych w matematyce lub innych naukach.

^{††}Te dwa nowe działania są użyteczne, kiedy chcemy opisać własności poszczególnych rodzajów relacji lub określonych relacji. (Por. zwłaszcza ćwiczenia 16 i *17 z tego rozdziału oraz 11 i *12 z rozdziału VII, a także § 45.) Łatwo też można znaleźć pewne prawa ogólne, dotyczące tych działań (por. ćwiczenie 4).

Relację R nazwiemy ZWROTNA W KLASIE K , jeśli każdy element x klasy K pozostaje w relacji R do samego siebie:

$$xRx;$$

jeśli natomiast żaden element tej klasy nie pozostaje w relacji R do samego siebie, czyli:

$$\sim (xRx),$$

to o relacji R mówi się, że jest PRZECIWSZWROTNA W KLASIE K . Relacja R jest SYMETRYCZNA W KLASIE K , jeśli dla dowolnych dwóch elementów x i y klasy K , wzór:

$$xRy$$

zawsze pociąga za sobą:

$$yRx.$$

Jeśli jednak wzór:

$$xRy$$

zawsze pociąga za sobą:

$$\sim (yRx),$$

to o relacji R mówi się, że jest ASYMETRYCZNA W KLASIE K . Relację R uważa się za PRZECHODNIĄ W KLASIE K , jeśli dla dowolnych trzech elementów x , y i z klasy K warunki:

$$xRy \quad \text{ i } \quad yRz$$

zawsze pociągają za sobą:

$$xRz.$$

Wreszcie, jeśli dla dowolnych dwóch różnych elementów x i y klasy K spełniony jest przynajmniej jeden ze wzorów:

$$xRy \quad \text{ i } \quad yRx,$$

innymi słowy, jeśli relacja R zachodzi między dwoma dowolnymi różnymi elementami klasy K przynajmniej w jednym kierunku, to o takiej relacji mówi się, że jest SPÓJNA W KLASIE K .

W przypadku, gdy K jest klasą pełną (czy, w każdym razie, dziedziną teorii nauki, którą się interesujemy – por. § 23), to zwykle mówimy nie o relacjach, które są zwrotne w klasie K , symetryczne w klasie K itd., lecz po prostu o relacjach zwrotnych, relacjach symetrycznych, itd.

§30 Relacje zwrotne, symetryczne oraz przechodnie

Wyszczególnione wyżej własności relacji występują często w pewnych zespołach. Na przykład, bardzo jest rozpowszechniony rodzaj relacji, które są równocześnie zwrotne, symetryczne i przechodnie. Znanym przykładem relacji tego typu jest identyczność. Prawo II z § 17 mówi, że relacja ta jest zwrotna, zgodnie z prawem III identyczność jest relacją symetryczną, a na mocy prawa IV – przechodnią (stąd też odpowiednio nazwy tych praw). Liczne przykłady relacji tego rodzaju znajdujemy w geometrii. I tak relacja przystawania jest zwrotna w zbiorze wszystkich odcinków (lub innych figur geometrycznych), jako że każdy odcinek przystaje do samego siebie; relacja ta jest symetryczna, gdyż z tego, że jeden odcinek jest przystający do drugiego, wynika, że drugi przystaje do pierwszego; jest ona wreszcie przechodnia, jeśli bowiem odcinek A przystaje do odcinka B , a odcinek B przystaje do odcinka C , to również odcinek A przystaje do odcinka C . Te same trzy własności posiadają relacje podobieństwa między wielobokami i relacja równoległości między prostymi (zakładając, że każda prosta jest równoległa do siebie samej), lub – już spoza geometrii – relacja równieśnictwa między ludźmi oraz relacja synonimiczności między słowami.

Relację, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna oraz przechodnia, odczuwamy zwykle jako pewną odmianę równości. Zamiast więc mówić, że między dwoma przedmiotami zachodzi taka relacja, można również powiedzieć (nie zmieniając sensu), że przedmioty te są równe pod takim a takim względem, lub – wyrażając się bardziej precyzyjnie – że pewne własności tych przedmiotów są identyczne. Tak więc zamiast powiedzieć, że dwa odcinki są przystające, dwóch ludzi jest rówieśnikami, a dwa słowa są synonimami, możemy równie dobrze stwierdzić, że dwa odcinki są równe pod względem długości, dwóch ludzi jest w równym wieku, zaś znaczenie dwóch słów jest identyczne.

* * *

*Pokażemy na przykładzie, jak dla wyrażeń tego typu można ustalić podstawy logiczne. W tym celu rozważmy relację podobieństwa między wielobokami. Pod uwagę weźmiemy zbiór wszystkich wieloboków podobnych do danego wieloboku P (lub po prostu własność wspólną wszystkim wielobokom podobnym do P i tylko do P , czyli kształt wieloboku P – por. uwagi przy końcu § 22.) Kształty stanowią

zatem pewne zbiory wieloboków (lub pewne własności wieloboków). Robiąc użytek z faktu, że relacja podobieństwa jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, możemy łatwo pokazać, że każdy wielobok należy do jednego i tylko jednego takiego zbioru, że dwa podobne wieloboki należą zawsze do tego samego zbioru oraz że dwa wieloboki, które nie są podobne, należą do różnych zbiorów. W konsekwencji te dwa stwierdzenia:

wieloboki P i Q są podobne

oraz

wieloboki P i Q mają ten sam kształt (czyli kształty P i Q są identyczne)

są równoważne.

Czytelnik natychmiast zauważy, że raz już w naszych rozważaniach postąpiliśmy w podobny sposób, konkretnie w § 26, kiedy dokonywaliśmy przekształcenia zwrotu:

klasy K i L są równoliczne

w zwrot równoważny:

klasy K i L mają tę samą liczbę kardynalną.

Bez większego trudu można pokazać, że przekształcenie takie daje się zastosować do każdej relacji, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Istnieje zresztą prawo logiczne, zwane ZASADĄ ABSTRAKCJI, które daje ogólne teoretyczne podstawy do rozważanej procedury przekształcania, ale tutaj pominiemy jej dokładne sformułowanie.*

* * *

Do określania relacji, będących równocześnie zwrotnymi, symetrycznymi i przechodnimi, służy pewien szeroko rozpowszechniony termin. Noszą one zwykle nazwę RELACJI RÓWNOWAŻNOŚCIOWYCH, lub krótko – RÓWNOWAŻNOŚCI[†]; czasem o takich relacjach mówi się

[†]Przymiotnik „równoważny” występuje bardzo często w tekstach logicznych i matematycznych. Konkretnie, jeśli w rozważaniach wprowadzono nową relację równoważności R i R zachodzi między dwoma przedmiotami, to często przedmioty te będzie się nazywało równoważnymi – dzięki temu nie trzeba szukać nowej nazwy. W § 37 podamy odpowiedni przykład. Niekiedy słowa „równoważny” używa się jako dodatku do innych terminów. (Mówi się też o równoważnych zdaniach, ale wtedy w grę wchodzi inne pojęcie; por. § 10, jak również odnośnik na str. 137.)

jako o równościach.^{††} W szczególności, „*równość*” bywa nazywana pewna relacja, która posiada omawiane tu trzy własności, a dwa przedmioty, między którymi ona zachodzi, nazywa się wówczas równymi. Na przykład w geometrii – jak już wspominaliśmy w § 16 – o odcinkach przystających często się mówi, że są równe. Podkreślamy tu raz jeszcze, że lepiej takich zwrotów w ogóle unikać; używając ich wprowadza się do terminologii wieloznaczność i łamie się umowę, zgodnie z którą terminy „*równość*” i „*identyczność*” winny być traktowane jako synonimy.

§31 Relacje porządkujące; przykłady innych relacji

Inny bardzo rozpowszechniony typ przedstawiają te relacje, które w danej klasie K są zarazem asymetryczne, przechodnie i spójne (można łatwo pokazać, że relacje te muszą być także przeciwzwrotne w tej klasie). O relacji posiadającej te własności powiadamy, że **USTALA PORZĄDEK W KLASIE K** lub, że jest **RELACJĄ PORZĄDKUJĄCĄ W KLASIE K** ; mówimy też, że klasa K jest **UPORZĄDKOWANA PRZEZ RELACJĘ R** . Rozważmy, na przykład, relację mniejszości (czy relację *mniejszy niż*, jak niekiedy mówimy); relacja ta jest asymetryczna w dowolnym zbiorze liczb, bowiem jeśli x i y są dowolnymi dwiema liczbami i jeśli

$$x < y,$$

to

$$y \not< x, \text{ czyli } \sim (y < x);$$

relacja ta jest przechodnia, ponieważ wzory:

$$x < y \quad \text{ i } \quad y < z$$

zawsze pociągają za sobą:

$$x < z;$$

^{††}Zauważmy, co następuje: Jeśli przedmiot x jest identyczny z przedmiotem y , to między x a y musi zachodzić każda relacja równoważności, czego czytelnik łatwo dowiedzie. (Możemy to samo powiedzieć zwięźle: *Jeśli R jest relacją równoważności, to $\mathcal{I} \subseteq R$.*) Wszelako sam fakt, że relacja równoważności zachodzi między dwoma przedmiotami, w zasadzie nie pociąga za sobą ich identyczności. Relacja identyczności jest więc najbardziej ograniczającą spośród wszystkich relacji równoważności.

wreszcie, relacja ta jest spójna, gdyż z różnych dwóch liczb jedna musi być mniejsza od drugiej (relacja ta jest również przeciwzwrotna, gdyż żadna liczba nie jest mniejsza od siebie samej). Zatem relacja mniejszości porządkuje dowolny zbiór liczb. Analogiczną relacją porządkującą dla dowolnego zbioru liczb jest relacja większości.[†]

Weźmy teraz pod uwagę relację starszeństwa. Jak łatwo sprawdzić, relacja ta jest przeciwzwrotna, asymetryczna oraz przechodnia w dowolnym zbiorze ludzi. Nie musi być natomiast spójna. Może się przypadkiem tak zdarzyć, że do danego zbioru należy dwóch ludzi, którzy są dokładnie w tym samym wieku, inaczej mówiąc, urodzili się w tej samej chwili. W tym przypadku relacja starszeństwa nie zachodzi w żadnym kierunku. Jeśli jednak weźmiemy zbiór ludzi, w którym nie ma ani jednej rówieśniczej pary, to relacja starszeństwa będzie ustanawiała porządek w tym zbiorze.

* * *

Znamy wiele relacji, które nie są ani relacjami porządkującymi, ani równoważnościami. Przytoczymy kilka przykładów.

Relacja różności jest przeciwzwrotna w dowolnym zbiorze przedmiotów, gdyż żaden przedmiot nie jest różny od samego siebie. Relacja ta jest symetryczna, bowiem jeśli

$$x \neq y,$$

to mamy również

$$y \neq x;$$

relacja ta nie jest przechodnia, gdyż wzory:

$$x \neq y \quad \text{ i } \quad y \neq z$$

nie pociągają za sobą wzoru:

$$x \neq z;$$

[†]Niekiedy przy rozważaniu pojęcia abstrakcyjnego trafiamy na odpowiadający mu byt matematyczny. W matematyce przyjęło się teraz mówić, że w takich okolicznościach byt ten po prostu „jest” rozważanym pojęciem. I tak, ktoś mógłby się wyrazić: „relacja większości jest porządkiem w zbiorze liczb”, mimo że wyobrażamy sobie raczej ten porządek jako pojęcie, nie będące (binarną) relacją. Czytelnik, uznawszy taki sposób ujmowania rzeczy za nieco sztuczny, może mówić, że relacja „ustala porządek”, jak w tekście. – Analogiczne uwagi można by wyrażać odnośnie pojęcia kształtu, rozważanego w poprzednim rozdziale.

relacja ta jest natomiast spójna, co natychmiast widać.

Relacja zawierania się między klasami jest – na mocy prawa identyczności i jednego z praw sylogizmu (por. § 23) – zwrotna i przechodnia; nie jest jednak ani symetryczna, ani asymetryczna, ponieważ wzór:

$$K \subseteq L$$

ani nie pociąga za sobą, ani też nie wyklucza wzoru:

$$L \subseteq K$$

(wzory te są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy klasy K i L są identyczne). Wreszcie, jak nietrudno się zorientować, relacja ta nie jest spójna. Tak więc relacja inkluzji różni się swymi własnościami od relacji, które rozważaliśmy poprzednio.

§32 Relacje jednoznaczne czyli funkcje

Zajmiemy się teraz nieco szczegółowiej pewną bardzo ważną kategorią relacji. Relację R nazywamy RELACJĄ JEDNOZNACZNĄ lub FUNKCJONALNĄ lub po prostu FUNKCJĄ, jeśli każdemu przedmiotowi x odpowiada co najwyżej jeden przedmiot y taki, że xRy ; innymi słowy, o ile wzory:

$$xRy \quad \text{ i } \quad xRz$$

zawsze pociągają za sobą:

$$y = z.$$

Poprzedniki relacji R , czyli te przedmioty x , którym faktycznie odpowiadają przedmioty y takie, że

$$xRy,$$

nazywamy WARTOŚCIAMI ARGUMENTU, następni zaś – WARTOŚCIAMI FUNKCJI R . Niech teraz R będzie dowolną funkcją, x – jedną z jej wartości argumentu. Symbolem „ $R(x)$ ” oznaczmy ową jedyną wartość funkcji y , która odpowiada wartości argumentu x . Wzór:

$$xRy$$

możemy więc zastąpić przez:

$$R(x) = y.$$

Utarło się przy tym, zwłaszcza w matematyce, że dla oznaczenia zależności funkcjonalnych używamy liter takich jak „ f ”, „ g ” ... (a nie zmiennych „ R ”, „ S ”, ...), wtedy wzory przybierają postać:

$$f(x) = y, \quad g(x) = y, \dots;$$

I tak wzór:

$$f(x) = y,$$

odczytujemy następująco:

funkcja f przyporządkowuje wartości argumentu x wartość y .

Wzory takie często zapisuje się zaczynając od wartości funkcji. Ostatni wzór przyjąłby wówczas równoważną postać:

$$y = f(x);$$

odczytalibyśmy go:

y jest wartością funkcji f , która odpowiada wartości argumentu x .

* * *

W wielu starszych podręcznikach algebry elementarnej znajdujemy definicję pojęcia funkcji znacznie odbiegającą od podanej tu definicji. Relację funkcjonalną charakteryzuje się tam, jako relację między dwiema „zmiennymi” wielkościami lub liczbami: „zmienną niezależną” i „zmienną zależną”, w ten sposób od siebie uzależnionymi, że zmiana jednej powoduje zmianę drugiej. Definicji tego rodzaju nie należy już dziś używać, gdyż nie wytrzymują one krytyki logicznej; są to pozostałości z okresu, w którym próbowano rozróżniać między wartościami „stałymi” a „zmiennymi” (por. § 1). Ktoś, kto pragnie spełniać wymagania nauki współczesnej, nie zrywając przy tym całkowicie z tradycją, nie musi odrzucać dawnej terminologii – może obok terminów „*wartość argumentu*” i „*wartość funkcji*” używać zwrotów „*wartość zmiennej niezależnej*” i „*wartość zmiennej zależnej*”.[†]

[†]Taki sposób wyrażania się, z nawiązywaniem do zmiennej niezależnej i zmiennej zależnej oraz zmian każdej z nich, spotyka się niekiedy w kursach wstępnych rachunku różniczkowo-całkowego. Chcielibyśmy więc pokazać na przykładzie, w jaki sposób pojęcia podane w tym paragrafie umożliwiają właściwsze sformułowania. – Niech funkcja f będzie określona wzorem: „ $y = x^2$ ”. Rozważamy różnicę lub zmianę:

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1,$$

którą zinterpretujemy wprowadzając kilka nowych funkcji: najpierw g , odpowiadającą „ $y = x + 1$ ”, następnie kombinację f i g , która odpowiada „ $y = (x + 1)^2$ ”, wreszcie, funkcję-różnicę, której wartość funkcjonalna w x jest $2x + 1$.

* * *

Najprostszy przykład relacji jednoznacznej przedstawia znana już nam relacja identyczności. Jako przykład funkcji z życia codziennego weźmy relację wyrażoną przez funkcję zdaniową:

ojcem x 'a jest y .

(Relacja ta przypomina przykład z § 28 z tym, że tutaj zamieniono role x 'a i y 'a.) Relacja ta jest zależnością jednoznaczną, ponieważ dla każdej osoby x istnieje co najwyżej jedna osoba y , będąca jej ojcem. Aby uwypuklić funkcjonalny charakter tej relacji do powyższego sformułowania dodamy przymiotnik „rodzony”[¶]:

rodzonym ojcem x 'a jest y

możemy też napisać:

y jest tą samą osobą co rodzony ojciec x 'a.

Taka zmiana wyjściowego wyrażenia, połączona ze wstawieniem dodatkowego słowa i dalszym przeformułowaniem, służy w języku codziennym temu samemu celowi, co przejście (przy użyciu naszych symboli) od wzoru:

$$xRy$$

do wzoru:

$$R(x) = y$$

i do wzoru:

$$y = f(x).$$

Zauważmy też, że pojęcie funkcji odgrywa bardzo istotną rolę w naukach matematycznych. Istnieje osobna gałąź matematyki wyższej poświęcona wyłącznie badaniom różnych rodzajów funkcji. Ale również w elementarnej matematyce, zwłaszcza w algebrze i trygonometrii, znajdujemy mnóstwo relacji funkcjonalnych. Weźmy na przykład wzory:

$$x + y = 5,$$

$$y = x^2,$$

[¶]W wydaniu angielskim książki Autor posłużył się rodzajnikiem określonym „the”, który nie ma odpowiednika w języku polskim (przyp. tłum.).

$$y = \log_{10}(x),$$

$$y = \sin(x).$$

Przyjrzyjmy się bliżej drugiemu z nich. Każdej liczbie x odpowiada tylko jedna liczba y taka, że $y = x^2$, a więc jest to rzeczywiście zależność funkcjonalna. Wartościami argumentu tej funkcji są tu dowolne liczby, wartościami funkcji – wyłącznie liczby nieujemne. Jeśli oznaczmy rozważaną funkcję symbolem „ f ”, to równaniu:

$$y = x^2$$

możemy nadać postać:

$$y = f(x).$$

Zapis taki stosuje się nie tylko dla relacji funkcjonalnych, ale również – dla określonych liczb. Skoro na przykład

$$4 = (-2)^2,$$

to wolno nam stwierdzić, że

$$4 = f(-2);$$

ostatni wzór stwierdza, że 4 jest wartością funkcji f , odpowiadającą wartości argumentu -2 .

Z drugiej strony już na gruncie matematyki elementarnej spotykamy liczne relacje, które nie są funkcjami. Na przykład relacja mniejszości nie jest z pewnością funkcją, gdyż dla każdej liczby x istnieje nieskończenie wiele liczb y takich, że

$$x < y.$$

Relacją funkcjonalną nie jest też relacja między liczbami x i y wyrażona wzorem:

$$x^2 + y^2 = 25,$$

ponieważ jednej i tej samej liczbie x mogą odpowiadać dwie różne liczby y , spełniające ten wzór. Na przykład liczbie 4 odpowiadają dwie liczby: 3 i -3 . Zauważmy, że wyrażone równaniami relacje między liczbami, które korelują z jedną liczbą x dwie lub więcej liczb y , w matematyce noszą czasem nazwę funkcji dwuwartościowych lub wielowartościowych (w odróżnieniu od funkcji jednowartościowych, czyli funkcji w zwykłym znaczeniu). Mówienie o takich relacjach jako o funkcjach wydaje się jednak niecelowe – w każdym razie na poziomie elementarnym – gdyż zaciera zasadniczą różnicę między pojęciem funkcji a pojęciem ogólniejszym, jakim jest relacja.

* * *

Funkcje odgrywają szczególnie doniosłą rolę przy stosowaniu matematyki do nauk empirycznych. Badając jakąkolwiek zależność między dwoma rodzajami wielkości napotykanymi w otaczającym nas świecie, staramy się uchwycić tę zależność w postaci wzoru matematycznego, na przykład równania, które pozwoli nam wyznaczać wielkość jednego rodzaju na podstawie odpowiadającej jej wielkości drugiego rodzaju. Równanie takie przedstawia wówczas pewną zależność funkcjonalną między obydwoimi rodzajami wielkości. Jako przykład przytoczymy dobrze znany wzór z fizyki:

$$s = 4.90 \cdot t^2$$

określający, jak droga s (w metrach), którą pokonuje swobodnie spadające ciało, zależy od (jest funkcją) czasu spadania t (w sekundach).

* * *

*Kończąc nasze uwagi na temat relacji jednoznacznych, chcielibyśmy podkreślić, że rozważane przez nas pojęcie funkcji różni się w sposób zasadniczy od znanych nam z § 2 pojęć funkcji zdaniowej i nazwowej. Ściśle mówiąc, terminy „*funkcja zdaniowa*” i „*funkcja nazwowa*” nie należą do zakresu logiki czy matematyki. Odnoszą się one do pewnych kategorii wyrażeń, służących do konstruowania twierdzeń logicznych i matematycznych, ale nie do przedmiotów, o których w nich mowa (por. § 9). Termin „*funkcja*” w tym nowym sensie jest natomiast wyrażeniem o charakterze czysto logicznym i oznacza typ przedmiotów, rozważanych w logice i matematyce. Istnieje niewątpliwie pewien związek między tymi pojęciami, który z grubsza można opisać następująco: jeśli zmienna y połączona jest znakiem „=” z funkcją zdaniową zawierającą x jako jedyną zmienną, powiedzmy „ $x^2 + 2x + 3$ ”, to wzór, który otrzymujemy (i który jest funkcją zdaniową):

$$y = x^2 + 2x + 3$$

wyraża zależność funkcjonalną. Inaczej mówiąc: relacja, która zachodzi między dwiema liczbami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one to równanie, stanowi funkcję w nowym sensie. Mamy tu jeden z powodów tego, że pojęcia te są często mylone.*

§33 Relacje wzajemnie jednoznaczne czyli funkcje odwracalne oraz odpowiedniość doskonała

Spośród ogółu zależności jednoznacznych na specjalną uwagę zasługują tzw. RELACJE WZAJEMNIE JEDNOZNACZNE, znane także jako FUNKCJE ODWRACALNE, których własnością jest nie tylko to, że każdej wartości argumentu x przyporządkowana jest tylko jedna wartość funkcji y , ale i na odwrót: każdej wartości funkcji y odpowiada tylko jedna wartość argumentu x . Relacje te można scharakteryzować jako relacje, które są jednoznaczne i których odwrotności są również jednoznaczne (dokładna definicja tych terminów wymagałaby jeszcze określenia dziedzin; pojęcie relacji odwrotnej omówiliśmy w § 28).

Jeśli f jest funkcją odwracalną, K – dowolną klasą wartości argumentu, zaś L – klasą wartości funkcji skorelowanych z elementami klasy K , to mówimy, że funkcja f ODWZOROWUJE KLASĘ K NA KLASĘ L W SPOSÓB JEDNOJEDNOZNACZNY lub, że ustala ODPOWIEDNIOŚĆ DOSKONAŁĄ MIĘDZY ELEMENTAMI KLAS K I L .[†]

* * *

[†]Czytelnik pewnie uzna za pożyteczne zapoznanie się z pewną dodatkową terminologią często stosowaną w bardziej zaawansowanych pracach. Ponieważ mówimy (jak wyżej): „ f odwzorowuje klasę ...”, funkcja jest nazywana także ODWZOROWANIEM. Przeciwdziedzinę funkcji powszechnie nazywa się jej OBRAZEM. Rozważmy teraz zmienną „ x ”, której wartościami mogą być wszystkie elementy pewnego zbioru (lub klasy) K . W takiej sytuacji mówi się, że „ x ” PRZYBIERA WARTOŚCI ZE ZBIORU K . Zwrotu tego używa się powszechnie przy omawianiu relacji jednoznacznych, jak w „ $y = f(x)$ ” i wtedy K jest dziedziną f , ale można go też stosować bardziej ogólnie, np. w odniesieniu do dowolnych relacji. (W podobnym sensie używamy w książce zwrotów takich jak „ x ” oznacza elementy K .) – Niech więc dziedziną f będzie K , jak poprzednio, i niech wartości funkcji będą w pewnym zbiorze M . To znaczy, że obrazem może być zbiór M , ale również – podzbiór właściwy zbioru M . Mówimy wówczas: f JEST ODWZOROWANIEM Z K DO M . Następujący przykład pokazuje, że często wygodnie jest zrobić założenie, które dopuści każdą z tych dwóch możliwości: Niech h będzie funkcją zdefiniowaną wzorem „ $y = x^n$ ”, gdzie „ x ” przybiera wartości ze zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a n – jakąś dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas h jest odwzorowaniem z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to obrazem jest sam $\mathbf{R}$, w przypadku gdy n jest parzyste – obrazem jest podzbiór właściwy zbioru $\mathbf{R}$. – Jeśli zbiór M zawierający wartości funkcji jest także obrazem, to powiemy, że f , jako odwzorowanie z K do M , jest SURJEKTYWNE lub NA. (W przeciwnym razie powiemy, że f odwzorowuje K w M .) Jeśli funkcja z K do M jest taka, że każda wartość funkcji odpowiada tylko jednej wartości argumentu (ale dana funkcja nie musi być surjektywna), to mówimy o odwzorowaniu INJEKTYWNYM. Zatem funkcja, będąca zarazem injektywna i surjektywna, jest odwracalna.

Oto kilka przykładów. Przypuśćmy, że mamy półprostą wychodzącą z punktu O i zaznaczonym na niej odcinkiem, który określa jednostkę długości. Niech X będzie dowolnym punktem na półprostej. Możemy teraz zmierzyć odcinek OX , czyli przyporządkować mu pewną nieujemną liczbę y , nazywaną długością odcinka. Ponieważ liczba ta zależy wyłącznie od położenia punktu X , wolno oznaczyć ją symbolem „ $f(X)$ ”. Będziemy mieli wówczas:

$$y = f(X).$$

Ale i na odwrót. Każdej liczbie nieujemnej y możemy przyporządkować dokładnie jeden odcinek OX , położony na rozważanej półprostej, którego długość równa się y ; innymi słowy, każdemu y odpowiada dokładnie jeden punkt X taki, że

$$y = f(X).$$

Zatem funkcja f jest odwracalna; funkcja ta ustala odpowiedniość doskonałą między punktami na półprostej i liczbami nieujemnymi (i równie łatwo można by ustalić odpowiedniość doskonałą między punktami całej prostej i wszystkimi liczbami rzeczywistymi). Inny przykład stanowi relacja wyrażona wzorem:

$$y = -x.$$

Jest to funkcja odwracalna, gdyż każdej liczbie y odpowiada tylko jedna liczba x spełniająca dany wzór. Łatwo się zorientować, że funkcja ta odwzorowuje na przykład zbiór wszystkich liczb dodatnich na zbiór wszystkich liczb ujemnych w sposób jednojednoznaczny. Jako ostatni przykład rozważmy relację wyrażoną wzorem:

$$y = 2x,$$

przyjmując przy tym, że symbol „ x ” oznacza tu wyłącznie liczby naturalne (lub, jakbyśmy powiedzieli, „ x ” przybiera wartości ze zbioru liczb naturalnych). Mamy tu znowu funkcję odwracalną; przyporządkowuje ona każdej liczbie naturalnej x liczbę parzystą $2x$. I odwrotnie – każdej liczbie parzystej y odpowiada jedna liczba naturalna x taka, że $2x = y$, mianowicie $x = \frac{1}{2}y$. W ten sposób nasza funkcja ustala odpowiedniość doskonałą między wszystkimi liczbami naturalnymi a liczbami parzystymi. – Liczne przykłady funkcji odwracalnych lub, innymi słowami, odwzorowań jednojednoznacznych można zaczerpnąć z geometrii (odwzorowania zachowujące daną symetrię, odwzorowania współliniowe, itp.).

* * *

Operując już terminem odpowiedniości doskonałej, możemy podać dokładną definicję pojęcia, które poprzednio byliśmy w stanie scharakteryzować tylko intuicyjnie. Chodzi tu o pojęcie klas równolicznych (patrz § 26). Powiemy mianowicie, że dwie klasy K i L są równoliczne, lub, że mają tę samą liczbę kardynalną, jeśli istnieje funkcja, która ustala odpowiedniość doskonałą między ich elementami. Z definicji tej i przytoczonych wyżej przykładów wynika zatem, że zbiór wszystkich punktów dowolnej półprostej jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb nieujemnych. I analogicznie zbiór liczb dodatnich jest równoliczny ze zbiorem liczb ujemnych. To samo odnosi się do zbioru wszystkich liczb naturalnych i zbioru wszystkich liczb parzystych. Ostatni przykład jest szczególnie pouczający, pokazuje bowiem, że klasa może być równoliczna ze swą podklasą właściwą. Wielu czytelnikom, nawykłym do porównywania pod względem liczby elementów wyłącznie klas skończonych, fakt ten na pierwszy rzut oka może się wydać paradoksalny. Klasa skończona, zgodnie z oczekiwaniem, ma liczbę kardynalną zawsze większą, niż jakakolwiek z jej części właściwych. Paradoks znika, gdy uświadomimy sobie, że zbiór wszystkich liczb naturalnych jest nieskończony i, że nic nas nie upoważnia do przypisywania klasom nieskończonym własności, zaobserwowanych wyłącznie na klasach skończonych. – Warto zauważyć, że wspomnianą tu własność zbioru liczb naturalnych – równoliczność z jedną ze swych części właściwych – posiadają wszystkie klasy nieskończone. Własność ta jest więc charakterystyczna dla klas nieskończonych i pozwala nam odróżniać je od klas skończonych – możemy sformułować definicję, zgodnie z którą klasa będzie skończona wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie równoliczna z żadną ze swych części właściwych.² (Definicja ta jednak pociąga za sobą pewną logiczną trudność, której nie będziemy tu omawiać.)

²Jednym z pierwszych, którzy zwrócili uwagę na rozważaną tu własność klas nieskończonych, był austriacko-czeski filozof i matematyk B. BOLZANO (1781–1848); w jego książce *Paradoxien des Unendlichen* (Lipsk 1851, opublikowana pośmiertnie) znajdujemy już początki współczesnej teorii zbiorów. Własność, o której mówimy wyżej, wykorzystał potem PEIRCE (por. odnośnik 2, str. 14) i inni do sformułowania dokładnej definicji klasy skończonej i klasy nieskończonej.

§34 Relacje wielocłonowe; funkcje kilku zmiennych i działania

Omawialiśmy dotąd wyłącznie RELACJE BINARNE lub DWUCZŁONOWE, czyli relacje zachodzące między dwoma przedmiotami. Często jednak w różnych naukach matematycznych spotykamy RELACJE TRÓJCZŁONOWE, a ogólnie – RELACJE WIELOCZŁONOWE. Jako typowy przykład relacji trójczłonowej może służyć znana z geometrii relacja *leży między*, która zachodzi między trzema punktami prostej; symbolicznie wyraża się ją wzorem:

$$A/B/C$$

który czytamy:

punkt B leży między punktami A i C.

Licznych przykładów relacji trójczłonowych dostarcza też arytmetyka; wystarczy wspomnieć o relacji między trzema liczbami x , y i z , która polega na tym, że trzecia z tych liczb jest sumą dwóch pierwszych:

$$x + y = z,$$

oraz o podobnych relacjach, wyrażonych wzorami:

$$x - y = z,$$

$$x \cdot y = z,$$

$$\frac{x}{y} = z.$$

Jako przykład czterocłonowej relacji wymieńmy relację zachodzącą między czterema punktami A , B , C i D wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między pierwszymi dwoma równa się odległości między dwoma pozostałymi, lub, innymi słowy, gdy odcinki AB i CD są przystające. Jeszcze innym przykładem jest relacja między liczbami x , y , z i t , ilekroć liczby te tworzą proporcję:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}.$$

* * *

Wśród relacji wieloczłonowych szczególnie ważne są wieloczłonowe relacje jednoznaczne, będące odpowiednikami dwuczłonowych relacji jednoznacznych. Ograniczmy się dla prostoty do relacji trójczłonowych. R nazywamy trójczłonową relacją jednoznaczną, jeśli dowolnym dwóm przedmiotom x i y odpowiada co najwyżej jeden taki przedmiot z , który pozostaje w tej relacji z x i y . Jedyny ów przedmiot (o ile w ogóle istnieje) oznaczamy bądź wyrażeniem:

$$R(x, y)$$

bądź też wyrażeniem:

$$xRy$$

(które teraz przyjmuje inne znaczenie, niż miało w teorii relacji binarnych). Aby więc wyrazić, że przedmiot z pozostaje w relacji funkcjonalnej z x i y , mamy do dyspozycji dwa wzory:

$$R(x, y) = z \quad \text{ i } \quad xRy = z.$$

Podwójnej symbolice towarzyszy dwojaki sposób wyrażania się. Kiedy używamy zapisu:

$$R(x, y) = z,$$

relację R nazywamy FUNKCJĄ. Żeby odróżnić dwuczłonowe relacje jednoznaczne od relacji trójczłonowych, o pierwszych mówimy FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ lub FUNKCJE JEDNOARGUMENTOWE, o drugich – FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH lub FUNKCJE DWUARGUMENTOWE. Podobnie czteroczłonowe relacje jednoznaczne noszą nazwę FUNKCJI TRZECH ZMIENNYCH lub FUNKCJI TRÓJARGUMENTOWYCH itd. Dla oznaczenia funkcji o dowolnej liczbie argumentów zazwyczaj posługujemy się, jak przedtem, zmiennymi „ f ”, „ g ”, ... (a na początku często stawiamy symbol oznaczający wartość funkcji); wzór:

$$z = f(x, y)$$

czytamy:

z jest wartością funkcji f przyporządkowaną wartościom argumentów x i y .

O ile posługujemy się symboliką:

$$z = xRy,$$

to relację R nazywamy DZIAŁANIEM lub ściślej DZIAŁANIEM BINARNYM, a podany wyżej wzór czytamy następująco:

x jest wynikiem działania R wykonanego na x i y ;

w tym przypadku zamiast litery „ R ” będziemy używać innych liter, zwłaszcza „ D ”. Przykłady podstawowych działań arytmetycznych – to dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Działaniami są też działania logiczne, jak dodawanie i mnożenie klas lub relacji (patrz §§ 25 i 28). Treść obu pojęć – funkcji dwóch zmiennych i działania binarnego – jest oczywiście taka sama. Warto też zaznaczyć, że funkcje jednej zmiennej nazywa się niekiedy działaniami, a dokładniej DZIAŁANAMI UNITARNYMI. Na przykład w algebrze klas myślimy zwykle o uzupełnieniu K' , jako o wyniku działania przeprowadzonego na K (a zazwyczaj nie mówimy o funkcji, która przyporządkowuje wartość K' wartości argumentu K).

* * *

Mimo że relacje wielocłonowe odgrywają istotną rolę w rozmaitych gałęziach wiedzy, ogólna teoria tych relacji weszła zaledwie w stadium początkowe; mówiąc o relacjach, czy też teorii relacji, ma się na myśli zwykle tylko relacje binarne. Bliższym badaniom poddano dotąd jedynie pewną kategorię relacji trójczłonowych, mianowicie kategorię działań binarnych, za pierwowzór których wolno nam uważać zwykle dodawanie arytmetyczne. Wiele z tych badań prowadzono w ramach odrębnej dyscypliny matematycznej, znanej jako teoria grup. Z pewnymi pojęciami teorii grup – a zatem także z pewnymi ogólnymi własnościami działań binarnych – zapoznamy się w drugiej części książki.

§35 Znaczenie logiki dla innych nauk

Omówiliśmy najważniejsze pojęcia współczesnej logiki, a przy sposobności poznaliśmy pewne prawa (nawiasem mówiąc, bardzo niewiele), dotyczące tych pojęć. Nie zamierzaliśmy jednak podać pełnej listy wszystkich pojęć i praw logicznych, którymi posługujemy się w naukach ścisłych. Nie jest to zresztą niezbędne dla studiowania lub uprawiania innych nauk, ani nawet do studiowania matematyki, która jest szczególnie blisko spokrewniona z logiką. – Ujmijmy to inaczej: logika uważana jest słusznie za podstawę[†] wszystkich innych

[†]Interesujące, że autor wolał powiedzieć „za podstawę”, a nie „za podstawowe narzędzie”. Zwroty te oddają różny stosunek wobec logiki. Dla Autora logika była podstawą matematyki w pełnym tego słowa znaczeniu, a nie tylko ważnym narzędziem.

nauk już choćby z tego względu, że w każdym rozumowaniu stosujemy pojęcia należące do logiki, oraz że każde poprawne rozumowanie odbywa się zgodnie z jej prawami. Nie wynika stąd jednak, by dogłębna znajomość logiki była warunkiem koniecznym poprawnego myślenia; nawet zawodowi matematycy, którzy błędów w rozumowaniu na ogół nie popełniają, nie znają zazwyczaj logiki w takim stopniu, by uświadamiać sobie wszystkie prawa logiczne, którymi się podświadomie posługują. Tym niemniej wydaje się sprawą niewątpliwą, że znajomość logiki posiada dużą praktyczną wartość dla każdego, kto pragnie poprawnie myśleć i rozumować, pogłębia bowiem wrodzone i nabyte w tym kierunku zdolności i pozwala unikać błędów w niecodziennych sytuacjach. Co zaś do konstruowania teorii matematycznych, to logika odgrywa niesłychanie ważną rolę także z bardziej podstawowego punktu widzenia – ale ten aspekt omówimy w następnym rozdziale.

Ćwiczenia

1. Podać przykłady relacji z zakresu arytmetyki, geometrii, fizyki i życia codziennego.
2. Rozważyć relację bycia ojcem, czyli relację wyrażoną funkcją zdaniową:

$$x \text{ jest ojcem } y'a.$$

Czy wszystkie istoty ludzkie należą do dziedziny tej relacji? Czy wszystkie one należą do przeciwdziedziny?

3. Rozważyć następujących siedem relacji między ludźmi – relację bycia ojcem, matką, dzieckiem, bratem, siostrą, mężem, żoną; por. poprzednie ćwiczenie. Oznaczmy te relacje symbolami „ $\mathcal{O}$ ”, „ $\mathcal{M}$ ”, „ $\mathcal{D}$ ”, „ $\mathcal{B}$ ”, „ $\mathcal{S}$ ”, „ $\mathcal{P}$ ”, „ $\mathcal{Z}$ ”. Stosując do tych relacji rozmaite działania zdefiniowane w § 28, otrzymujemy nowe relacje, dla których niekiedy mamy proste nazwy w języku codziennym; np. „ $\mathcal{P} \mid \mathcal{D}$ ” oznacza relację bycia zięciem (zob. przykład w § 28). Znaleźć, o ile to możliwe, proste nazwy dla następujących relacji:

$$\check{\mathcal{B}}, \check{\mathcal{P}}, \mathcal{P} \cup \mathcal{Z}, \mathcal{O} \cup \mathcal{B}, \mathcal{O} \mid \mathcal{M}, \mathcal{M} \mid \check{\mathcal{D}}, \mathcal{B} \mid \check{\mathcal{D}},$$

$$\mathcal{O} \mid (\mathcal{P} \cup \mathcal{Z}), (\mathcal{B} \mid \check{\mathcal{D}}) \cup [\mathcal{P} \mid (\mathcal{S} \mid \check{\mathcal{D}})].$$

Wyrazić za pomocą symboli „ $\mathcal{O}$ ”, „ $\mathcal{M}$ ” itd. oraz symboli z algebry relacji – relację bycia rodzicem, rodzeństwem, wnukiem lub wnuczką, synową oraz teściową.

Wyjaśnić znaczenie następujących wzorów i określić, które z nich są prawdziwe:

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}', \quad \check{\mathcal{B}} = \mathcal{S}, \quad \mathcal{O} \cup \mathcal{M} = \check{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{P} \mid \mathcal{M} = \mathcal{O}, \quad \mathcal{B} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B},$$

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \mid \check{\mathcal{D}}.$$

4. Rozważyć następujące dwa wzory z algebry relacji:

$$R \mid S = S \mid R \quad \text{ i } \quad (R \mid S) = \check{S} \mid \check{R}.$$

Pokazać na przykładzie, że pierwszy z nich nie zawsze jest spełniony. Spróbować pokazać, że drugi wzór jest spełniony przez dowolne relacje R i S .

Wskazówka: Zastanowić się, co to znaczy, że między dwoma przedmiotami x i y zachodzi relacja $(R \mid S)$ (tj. konwers relacji $R \mid S$), lub relacja $\check{S} \mid \check{R}$.

5. Podać za pomocą symboli definicje wszystkich terminów algebry relacji omówionych w § 28.

Wskazówka: Definicja sumy dwóch relacji ma na przykład następującą postać:

$$[x(R \cup S)y] \leftrightarrow [(xRy) \vee (xSy)].$$

6. Rozważyć następujące relacje i określić, które spośród własności omówionych w § 29 przysługują każdej z nich:

- (a) relacja podzielności w zbiorze liczb naturalnych;
- (b) relacja względnej pierwszości w zbiorze liczb naturalnych (dwie liczby naturalne nazywamy względnie pierwszymi, jeśli ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1);
- (c) relacja przystawania w zbiorze wieloboków;
- (d) relacja *jest dłuższy od* w zbiorze odcinków;
- (e) relacja prostopadłości w zbiorze prostych na płaszczyźnie;

- (f) relacja krzyżowania się w zbiorach wszystkich figur geometrycznych;
- (g) relacja równoczesności w klasie zdarzeń fizycznych;
- (h) relacja czasowego poprzedzania w klasie zdarzeń fizycznych;[†]
- (i) relacja pokrewieństwa w klasie ludzi;
- (j) relacja ojcostwa w klasie ludzi.

7. Czy to prawda, że każda relacja jest albo zwrotna, albo przeciwzwrotna (w danej klasie)? Albo symetryczna, albo niesymetryczna? Podać przykłady.

8. Relację R będziemy nazywać PRZECIWPRZECHODNIĄ W KLASIE K , jeśli dla dowolnych trzech elementów x, y i z klasy K wzory:

$$xRy \quad \text{ i } \quad yRz$$

pociągają za sobą:

$$\sim (xRz).$$

Które z relacji wymienionych w ćwiczeniach 3 i 6 są przeciwprzechodnie? Podać inne przykłady relacji przeciwprzechodnich. Czy każda relacja jest albo przechodnia, albo przeciwprzechodnia?

***9.** Pokazać, jak można przejść od zwrotu:

proste a i b są równoległe

do równoważnego zwrotu:

proste a i b mają identyczny kierunek,

oraz jak zdefiniować termin „*kierunek prostej*”.

Wykonać to samo zadanie dla następujących dwu zwrotów:

odcinki AB i CD są przystające

[†]Czytelnik, który studiował fizykę współczesną, rozumie, że relacje, o których mowa w (g) i (h), mają różny charakter w zależności od tego, czy stosujemy klasyczny opis przestrzenno-czasowy, czy ujęcie relatywistyczne. Wykonując to ćwiczenie należy przyjąć opis klasyczny. (Dodajmy, że w czasach pierwszego wydania *Wprowadzenia do logiki*, kiedy Autor układał to ćwiczenie, zawilosci teorii względności nie doceniano tak powszechnie, jak dziś.)

oraz

odcinki AB i CD mają równą długość.

Jakie prawo logiczne należy tu zastosować?

Wskazówka: Porównać z uwagami w § 30 odnośnie pojęcia podobieństwa.

10. O dwóch znakach lub wyrażeniach złożonych z kilku znaków, które mogą różnić się od siebie swym położeniem w przestrzeni, np. miejscem na stronie, na której są wydrukowane, lecz nie różnią się swym wyglądem zewnętrznym, powiadamy, że są RÓWNOKSZTAŁTNE; w przeciwnym razie znaki nazywamy RÓŻNOKSZTAŁTNYMI. I tak, we wzorze:

$$x = x,$$

zmienne po obu stronach znaku równości są równokształtne, podczas gdy we wzorze:

$$x = y$$

mamy zmienne różnokształtne.

Z ilu znaków składa się wzór:

$$x + y = y + x?$$

Na ile grup można podzielić te znaki, zaliczając dwa znaki równokształtne do tej samej grupy, a dwa znaki różnokształtne – do różnych grup?

Które spośród własności omówionych w § 29 przysługują relacjom równokształtności i różnokształtności?

***11.** Opierając się na wynikach poprzedniego ćwiczenia, wyjaśnić, dlaczego o znakach równokształtnych można powiedzieć, że mają ten sam KSZTAŁT lub że są równe co do kształtu; jak zdefiniować termin „*kształt danego znaku*” (por. ćwiczenie *9).^{††}

Rozpowszechnił się zwyczaj nazywania znaków równokształtnych po prostu równymi, a nawet traktowania ich tak, jak gdyby były jednym znakiem. Mówi się na przykład często, że w wyrażeniu:

$$x + x$$

^{††}Czytelnik pewnie zauważył, że tutaj słowo „*kształt*” znaczy mniej więcej to samo, co „*wygląd zewnętrzny*” w ćwiczeniu 10. Natomiast w § 30 słowa „*kształt*” używano w nieco innym znaczeniu. Wprowadza to lekkie zamieszanie, ale jednocześnie pokazuje, jakie trudności często napotykamy, próbując znaleźć terminy, które byłyby jasne i zarazem zgodne z intuicją.

z obu stron znaku „+” występuje ta sama zmienna. Jak się należy wyrazić, żeby zachować ścisłość?

***12.** Nieścisłości podobne do tych, na które zwróciliśmy uwagę w ćwiczeniu *11, zostały popełnione kilkakrotnie również w tej książce (nie chcemy bowiem walczyć z głęboko zakorzenionymi nawykami). Odszukać je na str. 12 i 57 i podać sposób ich uniknięcia.

Oto inny przykład podobnej nieścisłości: mówiąc o funkcjach zdaniowych z jedną zmienną wolną, mamy na myśli funkcje zdaniowe, w których wszystkie zmienne wolne są równokształtne. Jak uściślić zwrot:

funkcje zdaniowe z dwiema zmiennymi wolnymi?

13. Mając dany punkt na płaszczyźnie, rozważyć zbiór wszystkich kół, leżących na tej płaszczyźnie i posiadających wspólny środek w danym punkcie. Wykazać, że zbiór ten jest uporządkowany ze względu na relację *jest częścią*. Czy byłoby to również prawdziwe, gdyby koła nie leżały na jednej płaszczyźnie, lub nie posiadały wspólnego środka?

14. Rozważamy relację między słowami,[¶] którą nazwiemy relacją POPRZEDZANIA (W PORZĄDKU LEKSYKOGRAFICZNYM). Znaczenie tego terminu najlepiej zilustrują przykłady. Słowo „*aby*” poprzedza słowo „*coś*”, ponieważ pierwsze zaczyna się od litery „*a*”, drugie natomiast – od „*c*”, a w alfabecie polskim litera „*a*” stoi przed „*c*”. Słowo „*adres*” poprzedza słowo „*altana*”, bo chociaż słowa te mają tę samą pierwszą literę (czy raczej równokształtne pierwsze litery – por. ćwiczenie 10), to druga litera pierwszego słowa, „*d*”, występuje w alfabecie polskim wcześniej, niż druga litera drugiego słowa, „*l*”. Na tej samej zasadzie słowo „*emalia*” poprzedza słowo „*emeryt*”, a słowo „*tafla*” – słowo „*tafta*”. Wreszcie, słowo „*wab*” poprzedza słowo „*wabiarz*”, bo chociaż pierwsze trzy litery obu słów są takie same, to drugie słowo poza tymi trzema literami ma jeszcze inne; podobnie jest w przypadku słów „*myśl*” i „*myśliwiec*”.

Napisać następujące słowa w rzędzie tak, by w każdej parze słów, słowo po lewej stronie poprzedzało słowo po prawej stronie:

logika, arsen, salto, arsenał, logik, salwa, trudny, artysta, atom.

[¶]W ćwiczeniu tłumacz zamienił słowa angielskie na polskie.

Spróbować zdefiniować omawianą tu relację poprzedzania między słowami w sposób ścisły i ogólny. Pokazać, że relacja ta ustala porządek w zbiorze wszystkich polskich słów (bez łączników). Zwrócić uwagę na pewne praktyczne zastosowania tej relacji i wyjaśnić, dlaczego taka kolejność słów bywa nazywana porządkiem *leksykograficznym*.

15. Weźmy pod uwagę dowolną relację R , jej zaprzeczenie R' oraz klasę K . Pokazać, że prawdziwe są następujące twierdzenia z zakresu teorii relacji:

- (a) *jeśli relacja R jest zwrotna w klasie K , to relacja R' jest przeciwwrotna w tej klasie;*
- (b) *jeśli relacja R jest symetryczna w klasie K , to relacja R' jest też symetryczna w tej klasie;*
- (*c) *jeśli relacja R jest asymetryczna w klasie K , to relacja R' jest zwrotna i spójna w tej klasie;*
- (*d) *jeśli relacja R jest przechodnia i spójna w klasie K , to relacja R' jest też przechodnia w tej klasie.*

Czy prawa odwrotne do tych praw są też prawdziwe?

16. Wykazać, że jeśli relacja R posiada którekolwiek z własności omówionych w § 29, to konwers relacji $\check{R}$ posiada te same własności.

***17.** Własności relacji wprowadzonych w § 29 dają się łatwo wyrazić za pomocą terminów należących do algebry relacji, pod warunkiem, że relacje te odnoszą się do klasy pełnej. Na przykład wzory:

$$R \mid R \subseteq R \quad \text{ i } \quad \mathcal{D} \subseteq R \cup \check{R},$$

wyrażają, że relacja R jest, odpowiednio, przechodnia i spójna. Uzasadnić to; przypomnieć sobie znaczenie symbolu $\mathcal{D}$ z § 28. Podać podobne wzory, wyrażające, że relacja R jest symetryczna, asymetryczna, czy nieprzechodnia (por. ćwiczenie 8). Którą spośród własności relacji omówionych w tym rozdziale wyraża wzór:

$$\check{R} \mid R \subseteq \mathcal{I}?$$

18. Które spośród relacji wyrażonych następującymi wzorami są funkcjami?

- (a) $2y + 3x = 12$,
- (b) $y^2 = x^2$,
- (c) $y + 2 > x - 3$,
- (d) $y + x = x^2$,
- (e) *y jest matką x'a*,
- (f) *y jest córką x'a*.

Które z relacji rozważanych w ćwiczeniu 3 są funkcjami?

19. Rozważyć funkcję wyrażoną wzorem:

$$y = x^2 + 1.$$

Co tu jest zbiorem wszystkich wartości argumentu, a co – zbiorem wszystkich wartości funkcji?

***20.** Które z funkcji w ćwiczeniu 18 są odwracalne? Podać inne przykłady funkcji odwracalnych.

***21.** Rozważyć funkcję wyrażoną wzorem:

$$y = 3x + 1.$$

Pokazać, że funkcja ta jest odwracalna, i że odwzorowuje ona w sposób jednojednoznaczny przedział $[0, 1]$ w przedział $[1, 4]$ (por. ćwiczenie 6 z rozdziału IV). Jaki wniosek można stąd wyciągnąć odnośnie liczb kardynalnych tych przedziałów?

***22.** Rozważyć funkcję wyrażoną wzorem:

$$y = 2^x.$$

Użyć tej funkcji, by wzorując się na poprzednim ćwiczeniu wykazać, że zbiór wszystkich liczb jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb dodatnich.

***23.** Wykazać, że zbiór wszystkich liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

24. Podać przykłady relacji wielocłonowych z zakresu arytmetyki i geometrii.

25. Które z trójczłonowych relacji wyrażonych następującymi wzorami są funkcjami?

- (a) $x + y + z = 0$,
- (b) $z \cdot x > 2y$,
- (c) $z^2 = x^2 + y^2$,
- (d) $z + 2 = x^2 + y^2$.

26. Wymienić kilka praw fizyki wyrażonych za pomocą relacji funkcjonalnych, włączając prawa, w których występują dwie, trzy i cztery wielkości.

27. Rozważamy relację *leży między* wyrażoną symbolicznie wzorem „ $A/B/C$ ”, gdzie A , B i C są trzema różnymi punktami na danej płaszczyźnie (por. § 34). Napisać następujące dwa zdania za pomocą symboli:

- (a) *dla dowolnych punktów A , B , C i D , jeśli B leży między A i C oraz między A i D , to C leży między A i D ;*
- (b) *dla dowolnych punktów A i B , jeśli A i B są dwoma różnymi punktami, to istnieje punkt C taki, że ani B nie leży między A i C , ani C nie leży między B i A , ani A nie leży między B i C .*

Przetłumaczyć też następujące wzory na zwykły język:

- (c) $\forall_{A,B,C,D}[(B \neq C \wedge A/B/D \wedge A/C/D) \rightarrow (A/B/C \vee C/B/D)];$
- (d) $\exists_{A,C}[A \neq C \wedge \forall_B \sim (A/B/C)].$

Które ze zdań (a)–(d) są prawdziwe? (Punkty, o których mowa w ćwiczeniu, nie muszą koniecznie leżeć na tej samej prostej.)

***28.** Rozważyć następujące trzy wzory dotyczące działania binarnego oznaczonego przez O :

$$\forall_{x,y}(xOy = yOx), \quad \forall_{x,y,z}[(xOy)Oz = xO(yOz)], \quad \forall_{x,y}, \exists_z(x = yOz).$$

We wzorach tych podstawić pod „ O ” po kolei cztery symbole arytmetyczne: „+”, „−”, „ $\cdot$ ” i „:”. Które z otrzymanych zdań są prawdziwe?

VI

O metodzie dedukcyjnej

§36 Podstawowe składowe nauki dedukcyjnej – terminy pierwotne i zdefiniowane, aksjomaty i twierdzenia

Postaramy się obecnie przedstawić najważniejsze zasady i metody, które należy stosować przy konstruowaniu teorii logicznych i matematycznych.¹ Szczegółowa analiza i krytyczna ocena tych zasad jest jednym z zadań specjalnej dyscypliny, zwanej METODOLOGIĄ NAUK DEDUKCYJNYCH lub METODOLOGIĄ MATEMATYKI. Znajomość metod konstruowania określonej nauki jest niewątpliwie ważna dla każdego, kto naukę tę uprawia czynnie lub biernie. Jak się dalej przekonamy, w przypadku matematyki dobre rozumienie tych metod posiada szczególne znaczenie, bez niego bowiem nie sposób pojąć jej istoty.

* * *

Zasady, z którymi się zapoznamy, służą do zapewnienia matematyce (jak również logice) możliwie najwyższego stopnia jasności i pewności. Z tego punktu widzenia ideałem byłaby taka metoda, czy też sposób postępowania, który pozwoliłby wyjaśnić znaczenie każdego wyrażenia występującego w tej nauce i uzasadnić każde z jej praw.

¹W literaturze występowały już idee pokrewne pojęciom wprowadzanym w tym paragrafie. Zob. np. *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, (opublikowane pośmiertnie) pisma wielkiego francuskiego filozofa i matematyka B. PASCALA (1623–1662).

Łatwo jednak zobaczyć, że ideał taki nie jest osiągalny. Wyjaśniając znaczenie jakiegoś wyrażenia, z konieczności posługujemy się innymi wyrażeniami, z kolei by wyjaśnić znaczenie tych innych wyrażen, nie wchodząc przy tym w błędne koło, musimy sięgnąć po jeszcze inne wyrażenia, itd. W ten sposób rozpoczynamy proces, który nigdy się nie skończy, a który obrazowo nazywamy COFANIEM SIĘ DO NIESKOŃCZONOŚCI – *regressus in infinitum*. Podobnie przedstawia się sytuacja przy dowodzeniu twierdzeń matematycznych; dowodząc jakiegoś prawa, musimy odwołać się do innych praw, co prowadzi znów (o ile nie wejdziemy w błędne koło) do *regressus in infinitum*.

* * *

Jako wyraz kompromisu między owym nieosiągalnym ideałem a realnymi możliwościami ustaliły się pewne zasady konstruowania nauk matematycznych, które dają się opisać w sposób następujący.

Przystępując do budowy danej nauki, zaczynamy od wyodrębnienia pewnej nielicznej grupy wyrażen tej nauki, które wydają się nam zrozumiałe same przez się. Nazywamy je TERMINAMI PIERWOTNYMI lub TERMINAMI NIEZDEFINIOWANYMI i posługujemy się nimi bez wyjaśniania ich znaczenia. Równocześnie przyjmujemy zasadę, że nie będziemy używać żadnego innego wyrażenia rozważanej nauki, nie określiwszy uprzednio jego znaczenia za pomocą wyrazów pierwotnych i takich zwrotów tej nauki, których znaczenie już wyjaśniliśmy. Zdania, które w ten sposób ustalają znaczenie terminów, noszą nazwę DEFINICJI, zaś zwroty, których znaczenie zostaje ustalone, nazywamy TERMINAMI DEFINIOWANYMI.

Analogicznie postępujemy z twierdzeniami rozważanej nauki. Te twierdzenia, których prawdziwość wydaje się nam oczywista, obieramy jako tzw. TWIERDZENIA PIERWOTNE, lub AKSJOMATY czyli PEWNIKI (często nazywa się je również POSTULATAMI, lecz tego terminu nie będziemy tu używać w znaczeniu technicznym). Aksjomaty przyjmujemy za prawdziwe bez żadnego uzasadnienia, natomiast każde z pozostałych twierdzeń uznamy za prawdziwe dopiero, gdy ustalimy ich ważność, opierając się przy tym wyłącznie na aksjomatach, definicjach oraz na ustalonych już twierdzeniach tej nauki. Jak wiadomo, uzasadnione w taki sposób twierdzenia nazywają się TWIERDZENIAMI UZNANYMI lub PRAWAMI zaś proces uzasadniania ich nosi nazwę DOWODU. Mówiąc ogólniej, jeśli w ramach logiki czy matematyki ustalimy jedno twierdzenie wychodząc z innych twierdzeń, to proces taki nazwiemy WYPROWADZENIEM lub DEDUKCJĄ, zaś o rozważanym

twierdzeniu powiemy, że WYPROWADZAMY je lub DEDUKUJEMY z innych twierdzeń, lub też, że jest ono ich WNIOSKIEM.

* * *

Jedną z nauk, skonstruowanych według omówionych tu zasad, jest współczesna logika matematyczna (w tym kontekście będziemy używać terminu LOGIKA DEDUKCYJNA). Niestety, wąskie ramy tej książki nie pozwalają na poświęcenie temu ważnemu faktowi należytej mu uwagi. Każdą inną naukę konstruujemy zgodnie z podanymi zasadami i w oparciu o logikę; logikę, jak mówimy, zakładamy z góry. Oznacza to, że wszystkie zwroty i wszystkie prawa logiki traktujemy równorzędnie z terminami pierwotnymi i aksjomatami konstruowanej nauki; przy formułowaniu aksjomatów, praw i definicji używamy terminów logicznych bez wyjaśniania ich znaczenia, w dowodach zaś stosujemy prawa logiki bez uprzedniego ich uzasadnienia. Niekiedy przy konstruowaniu nauki dogodnie jest przyjąć z góry – w tym samym co poprzednio sensie – nie tylko logikę, ale również pewne nauki matematyczne, które zostały wcześniej zbudowane; nauki te łącznie z logiką można scharakteryzować krótko jako NAUKI WCZEŚNIEJSZE OD DANEJ NAUKI. Sama logika nie jest oparta na żadnej wcześniejszej nauce. Jeśli budujemy arytmetykę jako odrębną teorię matematyczną, to jako jedyną naukę wcześniejszą przyjmujemy logikę; natomiast przy uprawianiu geometrii dogodnie jest – acz nie koniecznie – założyć znajomość nie tylko logiki, lecz również arytmetyki.

Mając na względzie ostatnie uwagi, należy nieco zmodyfikować podane zasady. Przed przystąpieniem do konstruowania teorii, musimy wymienić nauki, które uważamy za wcześniejsze od niej; wszelkie wymagania odnośnie definiowania terminów i dowodzenia twierdzeń dotyczyć będą terminów i dowodów specyficznych dla konstruowanej nauki, czyli tych, które nie należą do nauk wcześniejszych.

* * *

Metoda nauki, która polega na ścisłym przestrzeganiu podanych wyżej zasad, nazywa się METODĄ DEDUKCYJNĄ; nauki skonstruowane według tych zasad nazywamy NAUKAMI DEDUKCYJNYMI.² Coraz bardziej rozpowszechnia się pogląd, że *metoda dedukcyjna stanowi*

²Metoda dedukcyjna nie jest bynajmniej zdobyczą współczesną. Już w *Elementach* matematyka greckiego EUKLIDESA (około 300 p.n.e.) znajdujemy wykład geometrii, do którego zgoła niewiele można dodać z punktu widzenia omówionych wyżej zasad metodologicznych. Przez około 2200 lat dzieło EUKLIDESA było dla

jedyną istotną cechą wyróżniającą nauki matematyczne spośród innych nauk; nie tylko każda nauka matematyczna jest nauką dedukcyjną, ale również na odwrót – każda nauka dedukcyjna jest nauką matematyczną (zgodnie z takim punktem widzenia logikę dedukcyjną należy traktować też jako dyscyplinę matematyczną). Nie będziemy tu uzasadniać tego poglądu, zaznaczymy tylko, że można przytoczyć ważne argumenty na jego poparcie.

§37 Modele i interpretacje nauki dedukcyjnej

Z konsekwentnego stosowania zasad przedstawionych w poprzednim paragrafie wynika szereg ciekawych i ważnych własności nauk dedukcyjnych. Część pytań, które się tu nasuwają, należy do dość złożonych i abstrakcyjnych, dlatego też spróbujemy wyjaśnić je na konkretnym przykładzie.

Przypuśćmy, że interesują nas ogólne prawa rządzące przystawianiem odcinków i chcemy ten fragment geometrii ustalić jako odrębną teorię dedukcyjną. Umawiamy się więc, że zmienne „ x ”, „ y ”, „ z ”, ... oznaczać będą odcinki. Terminy pierwotne oznaczmy symbolami „ $\mathcal{O}$ ” oraz „ $\cong$ ”. Pierwszy jest skrótem terminu „*zbiór wszystkich odcinków*”, drugi zaś oznacza relację przystawiania. Wzór:

$$x \cong y$$

odczytamy więc następująco:

odcinki x i y są przystające.

Przyjmijmy też dwa aksjomaty:

AKSJOMAT 1. *Dla dowolnego elementu x zbioru $\mathcal{O}$, $x \cong x$ (inaczej mówiąc: każdy odcinek jest przystający do siebie samego).*

matematyków ideałem i wzorem ścisłości naukowej. Istotny postęp w tym zakresie nastąpił dopiero po roku 1890, gdy podstawowe dyscypliny – geometria i arytmetyka – zostały ugruntowane zgodnie ze wszelkimi wymaganiami współczesnej metodologii matematyki. Spośród prac, którym to zawdzięczamy, dwie nabrały już znaczenia historycznego: praca zbiorowa *Formulaire de Mathématiques* (Torino 1895–1908), której redaktorem i głównym autorem jest włoski matematyk i logik G. PEANO (1858–1932) oraz *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig i Berlin 1899) autorstwa słynnego niemieckiego matematyka D. HILBERTA (1862–1943); to ostatnie dzieło stymulowało dalsze badania podstaw geometrii.

AKSJOMAT 2. *Dla dowolnych elementów x, y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $x \cong z$ i $y \cong z$, to $x \cong y$ (inaczej mówiąc: dwa odcinki, przystające do tego samego odcinka, przystają do siebie nawzajem).*

Z aksjomatów tych można wyprowadzić rozmaite twierdzenia o przystawianiu odcinków. Na przykład:

TWIERDZENIE 1. *Dla dowolnych elementów y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $y \cong z$, to $z \cong y$.*

TWIERDZENIE 2. *Dla dowolnych elementów x, y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $x \cong y$ i $y \cong z$, to $x \cong z$.*

Dowody tych dwóch twierdzeń są bardzo łatwe. Dla przykładu naszkicujemy dowód pierwszego z nich.

Wstawiając w Aksjomacie 2 „ z ” na miejsce „ x ”, otrzymujemy:

*dla dowolnych elementów y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $z \cong z$
i $y \cong z$, to $z \cong y$.*

W założeniu tego twierdzenia mamy wzór:

$$z \cong z$$

który – z uwagi na Aksjomat 1 – jest niewątpliwie słuszny, wobec czego można go pominąć. W ten sposób dochodzimy do rozważanego twierdzenia.

* * *

W związku z tymi prostymi rozważaniami, nasuwa się kilka następujących uwag.

Konstruowana przez nas mini-teoria dedukcyjna opiera się na odpowiednio wybranym układzie terminów pierwotnych i aksjomatów. Natomiast nasza znajomość przedmiotów oznaczonych tymi terminami, czyli zbioru odcinków i relacji przystawiania między nimi, jest bardzo rozległa i przyjęte aksjomaty w żadnej mierze nie wyczerpują jej. Ta obszerna wiedza jest jednak – że się tak wyrazimy – naszą prywatną sprawą i nie wpływa w najmniejszym stopniu na konstrukcję teorii. Nie robimy z niej zgoła żadnego użytku, wyprowadzając twierdzenia z aksjomatów. Zachowujemy się bowiem tak, jakbyśmy

nie rozumieli pojęć, które wchodzą w zakres naszych rozważań i jakbyśmy o przedmiotach nie wiedzieli nic poza tym, co zostało wyrażone w aksjomatach. Ignorujemy, jak to się powszechnie mówi, znaczenie przyjętych przez nas terminów pierwotnych, a uwagę naszą kierujemy wyłącznie na sformułowania aksjomatów, w których terminy te występują.

Prowadzi to do bardzo ważnego i ciekawego skutku. Zastąpmy terminy pierwotne we wszystkich aksjomatach i wszystkich twierdzeniach naszej nauki odpowiednimi zmiennymi, symbol „ O ” – zmienną „ K ” oznaczającą klasy, symbol „ $\cong$ ” – zmienną R oznaczającą relacje (i dla uproszczenia rozważań pominiemy tutaj definicje i twierdzenia, które zawierają definiowane terminy). Twierdzenia naszej teorii nie będą już zdaniem, lecz funkcjami zdaniowymi o dwóch zmiennych wolnych, „ K ” i „ R ”, wyrażającymi – mówiąc ogólnie – warunek, że relacja R posiada taką to a taką własność w klasie K (można również powiedzieć, że między K a R zachodzi pewna relacja; por. § 27). Na przykład Aksjomat 1 i Twierdzenia 1 i 2 stwierdzają teraz – jak łatwo zobaczyć – że relacja R jest, odpowiednio, zwrotna, symetryczna i przechodnia w klasie K . Aksjomat 2 będzie natomiast wyrażał własność, dla której nie mamy specjalnej nazwy, nazwiemy ją więc własnością $\mathcal{W}$. Oto ta własność:

dla dowolnych elementów x, y i z klasy K , jeśli xRz i yRz , to xRy .

W dowodach naszej teorii nie wykorzystujemy żadnych własności klasy odcinków i relacji przystawania poza wyrażonymi wprost w aksjomatach; każdy dowód można zatem uogólnić na dowolną klasę K i dowolną relację R o tych własnościach. W wyniku owego uogólnienia możemy z każdym twierdzeniem naszej teorii skorelować prawo ogólne z zakresu logiki, dokładniej, z teorii relacji, mówiące, że każda relacja R , która jest zwrotna i posiada własność $\mathcal{W}$ w danej klasie K , posiada również własność wyrażoną przez rozważane twierdzenie. Tak dochodzimy do następujących dwóch praw teorii relacji, które odpowiadają Twierdzeniom 1 i 2:[†]

- I. *Każda relacja R , która jest zwrotna w danej klasie K i posiada własność $\mathcal{W}$ w tej klasie, jest również symetryczna w K .*

[†]Można by tu przyjąć wzorec wprowadzony w § 3 i wyrazić te prawa w następujący sposób: *Dla dowolnej klasy K i dowolnej relacji R , ...* Logicy jednakże, jak wszyscy, lubią pewne urozmaicenie w sposobie mówienia i pisania!

- II. *Każda relacja R , która jest zwrotna w danej klasie K i posiada własność $\mathcal{W}$ w tej klasie, jest również przechodnia w K .*

Jeśli relacja R jest zwrotna i posiada własność $\mathcal{W}$ w klasie K , to K i R razem tworzą MODEL lub REALIZACJĘ systemu aksjomatycznego naszej teorii. I tak, klasa wszystkich odcinków i relacja przystawania, czyli przedmioty oznaczone terminami pierwotnymi, tworzą jeden model naszego przykładowego systemu aksjomatycznego; oczywiście, model ten spełnia wszystkie twierdzenia, które można wydedukować z aksjomatów. (Ściśle rzecz biorąc, powinniśmy powiedzieć, że model spełnia nie same twierdzenia tej teorii, lecz funkcje zdaniowe otrzymane z nich w wyniku zastąpienia terminów pierwotnych zmiennymi). Ten szczególny model nie odgrywa jednak żadnej specjalnej roli w konstruowaniu nauki. Możemy nawet powiedzieć, że uniwersalne prawa logiczne, jak prawa I i II, ilustrują ogólny wniosek, iż dowolny model systemu aksjomatycznego spełnia każde twierdzenie, które da się wydedukować z owych aksjomatów. Dlatego właśnie model systemu aksjomatycznego danej teorii nazywamy również MODELEM TEORII.

Jesteśmy w stanie przedstawić wiele różnych modeli naszego systemu aksjomatycznego, nawet w dziedzinie logiki i elementarnej matematyki. Modele takie otrzymamy, gdy wybierzemy w innej teorii dedukcyjnej (którą będziemy określać przymiotnikiem „nowa”) dwie odpowiednie stałe, powiedzmy „ $\mathcal{K}$ ” i „ $\mathcal{R}$ ” (gdzie pierwsza określa klasę, druga – relację), po czym wszędzie w Aksjomatach 1 i 2 „ $\mathcal{O}$ ” zamienimy na „ $\mathcal{K}$ ”, a „ $\cong$ ” na „ $\mathcal{R}$ ”, na końcu zaś pokażemy, że otrzymane w ten sposób zdania są twierdzeniami, lub wręcz aksjomatami nowej teorii. Jeśli się nam to uda, mówimy, że znaleźliśmy INTERPRETACJĘ systemu aksjomatycznego w obrębie nowej teorii dedukcyjnej. Ta nowa teoria musi się stosować do klasy $\mathcal{K}$ i relacji $\mathcal{R}$, zatem przedmioty te wyznaczają model; model zaś, zarówno jak interpretacja będą obejmować nie tylko system aksjomatyczny, lecz także całą naszą teorię dedukcyjną. Jeśli bowiem przez „ $\mathcal{K}$ ” i „ $\mathcal{R}$ ” zastąpimy terminy pierwotne „ $\mathcal{O}$ ” i „ $\cong$ ” nie tylko w aksjomatach, ale również w twierdzeniach naszej teorii, możemy być z góry pewni, że wszystkie twierdzenia otrzymane w ten sposób będą twierdzeniami uznanymi tej nowej teorii, a zatem – zdaniami prawdziwymi.

* * *

Podamy tutaj dwa konkretne przykłady modeli i interpretacji naszej fragmentarycznej teorii. W tym celu symbol „ $\mathcal{O}$ ” w Aksjomatach 1 i 2 zastąpimy symbolem klasy pełnej „ $\mathbf{V}$ ”, a symbol „ $\cong$ ” –

znakiem identyczności „ $\equiv$ ”. Jak łatwo się zorientować, aksjomaty w tej sytuacji staną się prawami logicznymi (konkretnie Prawami II i V z § 17 – w nieco zmodyfikowanym sformułowaniu). Klasa pełna i relacja identyczności stanowią zatem model przyjętego przez nas systemu aksjomatycznego, a nasza teoria znalazła niniejszym interpretację na gruncie logiki. Jeżeli więc w Twierdzeniach 1 i 2 na miejsce „ $\mathcal{O}$ ” wstawimy symbol „ $\mathbf{V}$ ”, zaś na miejsce „ $\cong$ ” – znak „ $=$ ”, to z pewnością otrzymamy zdania, które też będą prawami logiki (zresztą zapoznaliśmy się już z nimi – por. Prawa III i IV z § 17).

Rozważmy dalej zbiór wszystkich liczb lub dowolny inny zbiór liczb, oznaczając go przez „ $\mathcal{L}$ ”. Umówmy się, że jeśli różnica liczb x i y jest liczbą całkowitą, to będziemy nazywać je równoważnymi, wyrażając to wzorem:

$$x \equiv y.$$

Zachodzi więc na przykład wzór:

$$1\frac{1}{4} \equiv 5\frac{1}{4},$$

a nie zachodzi:

$$3 \equiv 2\frac{1}{3}.$$

Zastępując teraz w obu aksjomatach terminy pierwotne odpowiednio przez „ $\mathcal{L}$ ” i „ $\equiv$ ”, uzyskamy, jak łatwo wykazać, uznane twierdzenia z zakresu arytmetyki. Nasza teoria posiada zatem interpretację w arytmetyce, podczas gdy wybrany zbiór liczb $\mathcal{L}$ i relacja równoważności $\equiv$ stanowią model systemu aksjomatycznego. I znowu, nie przeprowadzając żadnego dodatkowego rozumowania, możemy być z góry pewni, że z chwilą, gdy poddamy analogicznemu przekształceniu Twierdzenia 1 i 2, dojdziemy do zdań prawdziwych z zakresu arytmetyki.

* * *

Opisane tu ogólne cechy systemów aksjomatycznych znajdują wiele interesujących zastosowań w badaniach metodologicznych. Zilustrujemy tutaj takie zastosowania na przykładzie; pokażemy, jak można dowieść – w oparciu o dotychczasowe obserwacje – że pewnych zdań nie da się wydedukować z naszego systemu aksjomatycznego.

Rozważmy następujące zdanie A (sformułowane wyłącznie za pomocą terminów logicznych i terminów pierwotnych naszej teorii):

A. *Istnieją dwa elementy x i y zbioru $\mathcal{O}$, dla których nie zachodzi, że $x \cong y$ (inaczej mówiąc: istnieją dwa odcinki, które nie są przystające).*

Zdanie to wygląda na niewątpliwie prawdziwe. Niemniej wszystkie próby dowiedzenia go w oparciu tylko o Aksjomaty 1 i 2 spełniają na niczym. Rodzi się więc przypuszczenie, że Zdania A po prostu nie da się wydedukować z naszych aksjomatów. Aby to potwierdzić, przeprowadzamy następujące rozumowanie. Otóż gdyby Zdanie A dało się wydedukować z naszych dwóch aksjomatów, to – jak wiemy – każdy model tego systemu spełniałby to zdanie; jeśli więc udałooby się nam znaleźć model systemu aksjomatycznego, który nie spełnia Zdania A, mielibyśmy dowód, iż zdania tego nie da się wydedukować z Aksjomatów 1 i 2. Okazuje się, że uzyskanie takiego modelu nie jest wcale trudne. Weźmy na przykład zbiór wszystkich liczb całkowitych lub dowolny inny zbiór liczb całkowitych oznaczony przez $\mathcal{C}$ (odpowiedni byłby na przykład zbiór składający się tylko z liczb 0 i 1) oraz omawianą wyżej relację równoważności $\equiv$ między liczbami. Wiemy już z poprzednich rozważań, że taki zbiór $\mathcal{C}$ i relacja $\equiv$ stanowią model naszego systemu aksjomatycznego. Zdanie A wszelako nie jest spełnione przez ten model, nie istnieją bowiem dwie liczby całkowite x i y , które nie są równoważne, czyli takie, których różnica nie jest liczbą całkowitą. Inny model odpowiedni do tego celu tworzy dowolna klasa indywiduów i relacja uniwersalna $\mathbf{V}$, która zachodzi między dowolnymi dwoma indywiduami (relacji tej oczywiście nie należy mylić z klasą pełną).

Typ rozumowania, które tu zastosowaliśmy, nosi nazwę METODY DOWODZENIA POPRZEZ WSKAZANIE MODELU; jej wariant odnosi się bezpośrednio do interpretacji i wtedy nazywa się METODĄ DOWODZENIA PRZEZ INTERPRETACJĘ.

* * *

Omówione wyżej spostrzeżenia i pojęcia można rozszerzyć – bez zasadniczych zmian — na inne teorie dedukcyjne. W następnym paragrafie spróbujemy opisać je w sposób ogólny.

§38 Prawo dedukcji; formalny charakter nauk dedukcyjnych

*Rozważamy dowolną teorię dedukcyjną, która jest oparta na pewnym systemie terminów pierwotnych i aksjomatów. Dla uproszczenia

naszych rozważań przyjmujemy, że teoria ta zakłada z góry tylko logikę; innymi słowy, logika jest jedyną nauką wcześniejszą od danej teorii (por. § 36). Wyobraźmy sobie, że we wszystkich twierdzeniach naszej teorii terminy pierwotne zostały zastąpione wszędzie odpowiednimi zmiennymi (jak w § 37; znowu dla prostoty nie bierzemy pod uwagę definicji i twierdzeń z terminami zdefiniowanymi). Prawa konstruowanej przez nas teorii stały się funkcjami zdaniowymi, zawierającymi jako zmienne wolne te symbole, które weszły w miejsce terminów pierwotnych; funkcje te nie zawierają żadnych innych stałych poza tymi, które należą do logiki. Mając dane pewne przedmioty, czyli klasy, relacje, itp., można badać, czy spełniają one wszystkie aksjomaty naszej teorii, lub – ściślej mówiąc – czy spełniają funkcje zdaniowe otrzymane z tych aksjomatów w opisany sposób (a więc, czy nazwy lub oznaczenia przedmiotów, podstawione w miejsce zmiennych wolnych, czynią z funkcji zdaniowych zdania prawdziwe; por. § 2). Jeśli się okaże, że tak, to powiemy, że rozważane przedmioty tworzą MODEL lub są REALIZACJĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO naszej teorii dedukcyjnej. Niekiedy mówimy, że tworzą one MODEL TEORII DEDUKCYJNEJ jako takiej. W analogiczny sposób możemy badać, czy dane przedmioty spełniają jakikolwiek inny wybrany system twierdzeń naszej teorii i czy wobec tego tworzą one model tego systemu (gdzie twierdzenia mogą być aksjomatami lub nie, system zaś może składać się z pojedynczego twierdzenia).

Model systemu aksjomatycznego stanowią na przykład przedmioty oznaczone terminami pierwotnymi danej teorii, ponieważ przyjmujemy, że wszystkie aksjomaty są zdaniami prawdziwymi; oczywiście, model ten będzie spełniał wszystkie twierdzenia naszej teorii. Nie odgrywa on jednak żadnej uprzywilejowanej roli przy konstruowaniu naszej teorii. Wyprowadzając z aksjomatów to czy inne twierdzenie, nie myślimy o żadnych specyficznych własnościach tego modelu, użytek robimy tylko z tych własności, które są wymienione wprost w aksjomatach i które wobec tego należą do każdego modelu systemu aksjomatycznego. W konsekwencji dowód jakiegokolwiek twierdzenia naszej teorii da się rozciągnąć na każdy model systemu aksjomatycznego, a poza tym możemy przekształcić go (wstawiając – jak poprzednio – zmienne na miejsce stałych pierwotnych) w bardziej ogólne rozumowanie, które nie należy już do naszej teorii, lecz do logiki. W wyniku takiego zabiegu otrzymujemy ogólne twierdzenie logiczne (jak prawa I i II z poprzedniego paragrafu), które głosi, że omawiane twierdzenie – gdy odpowiednio interpretowane – spełnione jest przez każdy

model naszego systemu aksjomatycznego. Ostateczną konkluzję, do której w ten sposób dochodzimy, sformułujemy następująco:

Każde twierdzenie danej teorii dedukcyjnej spełnione jest przez dowolny model systemu aksjomatycznego tej teorii, a ponadto każdemu twierdzeniu odpowiada ogólne twierdzenie, dające się sformułować i udowodnić w ramach logiki, które mówi, że omawiane twierdzenie spełnione jest przez dowolny taki model.

Mamy tutaj prawo ogólne z dziedziny metodologii nauk dedukcyjnych, które – w bardziej precyzyjnym sformułowaniu znane jest pod nazwą PRAWA DEDUKCJI (lub TWIERDZENIA O DEDUKCJI).³

Ważne znaczenie praktyczne tego prawa wynika z faktu, że jesteśmy zwykle w stanie wskazać szereg różnych modeli systemu aksjomatycznego wybranej teorii, nie wykraczając poza obręb nauk dedukcyjnych (czyli matematyki). W poprzednim paragrafie pokazaliśmy jeden ze szczególnie interesujących nas sposobów szukania takich modeli, polegający na wybraniu pewnych wyrazów stałych z jakiejś innej teorii dedukcyjnej (którą może być logika lub nauka zakładająca logikę, zaś wyrazy stałe mogą być pierwotne lub zdefiniowane), wstawieniu ich w aksjomatach na miejsce terminów pierwotnych i pokazaniu, że tak otrzymane zdania są twierdzeniami uznanymi tej innej teorii. Powiadamy wówczas, że ZNALEŻLIŚMY INTERPRETACJĘ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO DAWNEJ NAUKI W NOWEJ NAUCE.[†] (W

³Odkrycia tego prawa dokonali niezależnie od siebie francuski logik J. HERBRAND (1908–1931) oraz Autor.

[†]Czytelnik powinien zauważyć, że tutaj, jak poprzednio, mieliśmy do czynienia z dwoma pojęciami: pojęciem modelu oraz pojęciem interpretacji jednej (dedukcyjnej) teorii w innej. Podkreślamy, że są to dwa różne pojęcia: pierwsze, dotyczące modeli, obejmuje szczególne przedmioty takie, jak klasy, relacje, itp., natomiast interpretacja zależy od twierdzeń uznanych. W praktyce wszelako idee te się zlewają, gdyż interpretacja jednej teorii w innej sugeruje zwykle model (na przykład można wziąć przedmioty, do których pierwotnie odnosiła się nowa nauka), z kolei wyjście od modelu może prowadzić wprost do nauki stowarzyszonej, czyli do interpretacji oryginalnej nauki. – Przypomnijmy sobie przykład z poprzedniego paragrafu. Rozważaliśmy tam zbiór $\mathcal{L}$ liczb i relacji równoważności $\equiv$, przedmioty te zaś określają model naszej mini-teorii. Jeżeli teraz opiszemy ów zbiór i ową relację odwołując się do arytmetyki, doprowadzi nas to do interpretacji naszej mini-teorii w obrębie arytmetyki. – Zauważmy też, że przy omawianiu modeli słowa „interpretacja” używa się niekiedy w innym sensie. Można by, na przykład, powiedzieć, że nowe terminy (jak „ $\mathcal{L}$ ” i „ $\equiv$ ”) stanowią nową interpre-

szczegółności może się zdarzyć, że te wybrane wyrazy stałe należą do zakresu dawnej nauki, przy czym niektóre terminy pierwotne mogłyby nawet pozostać bez zmiany; w takim przypadku powiemy, że dany system aksjomatyczny znalazł nową interpretację w uprawianej przez nas nauce.) – Poddajmy z kolei analogicznemu przekształceniu twierdzenia dawnej nauki, czyli zastąpmy w nich wszędzie terminy pierwotne tymi wyrazami stałymi, których użyliśmy przy interpretowaniu aksjomatów. Również do tego przypadku stosuje się prawo dedukcji i możemy być z góry pewni, że uzyskane na tej drodze zdania będą prawami nowej nauki. Wniosek ten możemy sformułować następująco:

Wszystkie twierdzenia udowodnione w oparciu o dany system aksjomatyczny pozostają słuszne dla dowolnej interpretacji tego systemu.

Inaczej mówiąc, przeprowadzanie odrębnego dowodu dla którejkolwiek z owych przekształconych twierdzeń jest rzeczą zbędną; byłoby to zresztą zadanie czysto mechanicznej natury, wystarczy bowiem przekształcić odpowiednie rozumowanie z zakresu dawnej nauki, poddając je tym samym modyfikacjom, które zastosowaliśmy poprzednio w odniesieniu do aksjomatów i twierdzeń. Każdy dowód w obrębie nauki dedukcyjnej zawiera – potencjalnie – nieograniczoną liczbę analogicznych dowodów.

* * *

Opisane wyżej fakty ilustrują wielką wartość metody dedukcyjnej z punktu widzenia ekonomii myślenia ludzkiego. Posiadają one doniosłe znaczenie teoretyczne, już choćby z tego powodu, że tworzą fundamenty dla różnych rozumowań i badań w zakresie metodologii nauk dedukcyjnych. W szczególności prawo dedukcji stanowi teoretyczną podstawę dla wszystkich dowodów znanych jako dowody poprzez wskazanie modelu lub poprzez interpretację; jeden ich przykład napotkaliśmy już w poprzednim paragrafie, inne znajdziemy w II części książki.

Dla dokładności dodamy, że powyższe rozważania dają się zastosować do każdej nauki dedukcyjnej, przy konstruowaniu której zakłada się znajomość logiki, natomiast stosowanie tych uwag do samej logiki

tację oryginalnych terminów (w tym przypadku „ $\mathcal{O}$ ” i „ $\cong$ ”). Przykłady takiego użycia podajemy w odsyłaczach w rozdziale VIII.

następcza pewne trudności, których nie będziemy tutaj rozstrząsać. Jeśli nauka dedukcyjna zakładałaby z góry nie tylko znajomość logiki, ale również innych nauk, to podane tu pojęcia wymagałyby nieco bardziej skomplikowanego sformułowania.

* * *

Wspólnym źródłem wspomnianego wyżej zjawiska metodologicznego jest podkreślony przez nas w poprzednim paragrafie wymóg, by konstruując naukę dedukcyjną, ignorować znaczenie aksjomatów, a pod uwagę brać tylko ich postać. Z tej przyczyny mówi się o czysto FORMALNYM CHARAKTERZE nauk dedukcyjnych i wszelkich rozumowań w obrębie tych nauk.

Od czasu do czasu spotyka się wypowiedzi, które formalny charakter matematyki przedstawiają w sposób paradoksalny i przesadzony. Wypowiedzi te, choć w zasadzie słuszne, mogą stać się źródłem zamętu i pomieszania pojęć. Słyszysz się więc, a niekiedy nawet czyta, że pojęciom matematycznym nie można przypisywać żadnej określonej treści; że w matematyce nie wiemy, o czym właściwie mówimy i że nie interesuje nas, czy to co mówimy, jest prawdą. Do takich sądów należy odnosić się raczej krytycznie. Jeśli ktoś przy konstruowaniu nauki zachowuje się, jak gdyby nie rozumiał znaczenia terminów tej nauki, to nie jest to jednoznaczne z odmawianiem tym terminom jakiegokolwiek sensu. Zdarza się, co prawda, że budując pewną teorię dedukcyjną, nie przypisujemy jej terminom określonego znaczenia i odnosimy się do nich jak do symboli zmiennych. W takich okolicznościach mówimy, że traktujemy teorię jako SYSTEM FORMALNY. Ale sytuacja tego rodzaju (nie brana pod uwagę w naszym ogólnym omówieniu nauk dedukcyjnych w § 36) zdarza się tylko, gdy dysponujemy kilkoma modelami czy interpretacjami dla systemu aksjomatycznego tej nauki, a więc jeśli mamy szereg możliwości przypisania konkretnego znaczenia terminom występującym w tej nauce, ale z żadnej z tych możliwości nie chcemy wyróżniać. Taki natomiast system formalny, dla którego nie potrafilibyśmy podać ani jednego modelu, przypuszczalnie nikogo by nie interesował.

* * *

Na zakończenie chcemy zwrócić uwagę czytelnika na pewne szczególne – o wiele ważniejsze od podanych w § 37 – przykłady interpretacji nauk matematycznych.

System aksjomatyczny dla arytmetyki daje się zinterpretować w obrębie geometrii: mając dowolną linię prostą, można zdefiniować pewne relacje między jej punktami oraz pewne działania na tych punktach tak, by spełnić wszystkie aksjomaty – a zatem także wszystkie twierdzenia – z zakresu arytmetyki, podczas gdy pierwotne sformułowania tych aksjomatów i twierdzeń dotyczą odpowiednich relacji między liczbami i działań na liczbach. (Jest to ściśle związane z okolicznościami wspomnianymi w § 33, mianowicie z możliwością ustanowienia odpowiedniości doskonałej między wszystkimi punktami prostej a wszystkimi liczbami.) I odwrotnie, systemy aksjomatyczne geometrii mają interpretacje w obrębie arytmetyki. Fakty te znajdują wielorakie zastosowanie. Możemy używać przedmiotów geometrycznych, by dać poglądowy przykład rozmaitych faktów z zakresu arytmetyki – jest to tzw. metoda graficzna; z drugiej strony, możemy badać cechy geometryczne za pomocą metod arytmetyki, czy też algebry, ponadto istnieje specjalny dział geometrii, znany jako geometria analityczna, który zajmuje się badaniami tego typu.

Arytmetykę, jak już widzieliśmy, można skonstruować jako dział logiki (por. § 26). Jeśli jednak potraktujemy arytmetykę jako osobną naukę dedukcyjną, opartą na własnym systemie terminów pierwotnych i aksjomatów, to jej relację do logiki da się ująć następująco: arytmetyka dopuszcza interpretację w obrębie logiki (przy czym aksjomat nieskończoności jest włączony do logiki – por. § 26); inaczej mówiąc, możliwe jest zdefiniowanie pewnych pojęć logicznych, spełniających wszystkie aksjomaty arytmetyki, a zatem także wszystkie twierdzenia. Jeśli teraz przypomnimy sobie, że geometria posiada interpretację w obrębie arytmetyki, to dojdziemy do wniosku, że zarówno geometria jak arytmetyka posiadają interpretację w obrębie logiki. Wszystkie te fakty są bardzo ważne z metodologicznego punktu widzenia.*

§39 Wybór aksjomatów i terminów pierwotnych; ich niezależność

Omówimy obecnie zagadnienia bardziej specjalnej natury, dotyczące jednak podstawowych składników metody dedukcyjnej, mianowicie wyboru terminów pierwotnych z jednej strony oraz konstruowania definicji i dowodów z drugiej.

* * *

Ważne jest, by uświadomić sobie, że przy wyborze terminów pierwotnych i aksjomatów mamy dużą swobodę; błędem byłoby myśleć, że pewnych wyrażeń w danej teorii nie da się zdefiniować, zaś pewnych praw – w żaden sposób wyprowadzić i że wobec tego należy uznać je, odpowiednio, za terminy pierwotne oraz aksjomaty. Okoliczność ta prowadzi do pojęcia EKWIPOLENCJI lub RÓWNOWAŻNOŚCI. Dwa systemy zdań danej teorii nazywamy RÓWNOWAŻNYMI,[†] gdy każde zdanie pierwszego systemu daje się wydedukować ze zdań drugiego wraz z twierdzeniami nauk wcześniejszych od danej teorii. I odwrotnie, czyli gdy każde zdanie drugiego systemu da się wyprowadzić ze zdań pierwszego (wraz z twierdzeniami nauk wcześniejszych; zdań występujących w obu systemach nie musimy, rzecz jasna, równocześnie wyprowadzać). Wyobraźmy sobie dalej, że nauka dedukcyjna została ustalona w oparciu o pewien system aksjomatów, i że w trakcie konstruowania jej trafiłszy na system praw, które okazały się równoważne – w sensie właśnie opisanym – z wyjściowym systemem aksjomatycznym. (Aby uzyskać konkretny przykład wróćmy do owej mini-teorii przystawiania odcinków, omawianej w § 37. Otóż łatwo pokazać, że system aksjomatyczny tej teorii jest równoważny z systemem zdań, składającym się z Aksjomatu 1 oraz Twierdzeń 1 i 2.) Kiedy zachodzi sytuacja tego rodzaju, to – z teoretycznego punktu widzenia – można przebudować całą naukę, przyjmując prawa nowego systemu za aksjomaty i udowadniając dawne aksjomaty jako twierdzenia. Nawet okoliczność, że nowe aksjomaty początkowo mogłyby nie mieć tego charakteru bezpośredniej oczywistości co dawne, nie posiada istotnego znaczenia; każde bowiem prawo uzyskuje w pewnej mierze cechę oczywistości z chwilą, gdy potrafimy je wyprowadzić w sposób przekonujący z innych oczywistych praw. Wszystko to dotyczy również – *mutatis mutandis* – terminów pierwotnych nauki dedukcyjnej; ich system możemy zastąpić każdym innym systemem terminów danej nauki pod warunkiem, że te dwa systemy są równoważne, a więc że każdy termin pierwszego systemu da się zdefiniować za pomocą terminów drugiego oraz terminów zaczerpniętych z nauk wcześniejszych i *vice versa*. O wyborze systemu terminów pierwotnych i aksjomatów spośród wszelkich możliwych systemów równoważnych nie decydują względy natury teoretycznej lub zasadniczej

[†]Tutaj słowa „równoważny” używamy w dwóch różnych znaczeniach. Gdy zależy nam na większej dokładności, mówimy, że dwa systemy zdań są RÓWNOWAŻNE POD WZGLĘDEM DOWODU, zaś dwa systemy terminów pierwotnych (por. poniżej) są RÓWNOWAŻNE POD WZGLĘDEM ŚRODKÓW WYRAZU. Zwykle z kontekstu wynika, o które znaczenie terminu „równoważny” nam chodzi.

(w każdym razie nie tylko), wchodzą tu natomiast w grę inne czyniki – praktyczne, dydaktyczne, a nawet estetyczne. Niekiedy chodzi o to, by wybrać możliwie najprostsze terminy pierwotne i aksjomaty, albo by było ich możliwie mało; kiedy indziej zależy nam, by pozwalały one w najprostszy sposób zdefiniować terminy i dowieść praw danej nauki, które nas szczególnie interesują.

* * *

Z powyższymi uwagami wiąże się jeszcze inna kwestia. W zasadzie dążymy do tego, by system aksjomatyczny nie zawierał ani jednego zbędnego prawa, czyli prawa, które dałoby się wywieść z pozostałych aksjomatów i mogłoby być dzięki temu zaliczone do twierdzeń konstruowanej nauki. Taki system nazywamy NIEZALEŻNYM (lub SYSTEMEM AKSJOMATÓW WZAJEMNIE NIEZALEŻNYCH). Dbamy również o to, by system terminów pierwotnych był NIEZALEŻNY, a więc by nie zawierał żadnych zbędnych terminów, dających się zdefiniować za pomocą innych. Dość często jednak rezygnujemy z tych metodologicznych postulatów (czy zasad) na rzecz pewnych względów natury praktycznej, a zwłaszcza dydaktycznej; dotyczy to przede wszystkim sytuacji, w których opuszczenie zbędnego aksjomatu lub terminu pierwotnego pociągnęłoby za sobą znaczne komplikacje w konstruowaniu nauki.^{††}

§40 Formalizacja definicji i dowodów, sformalizowane nauki dedukcyjne

Metoda dedukcyjna słusznie jest uważana za najdoskonalszą ze znanych metod konstruowania teorii. Unikając *regressus ad infinitum*, równocześnie uniemożliwia ona w znacznej mierze powstanie niejasności i błędów. Stosowanie tej metody usuwa niemal wszystkie wątpliwości odnośnie treści pojęć i prawdziwości twierdzeń danej teorii; te, które pozostają, dotyczą tylko niewielkiej liczby terminów pierwotnych i aksjomatów.

Należy tu jednak uczynić pewne zastrzeżenie. Stosowanie metody dedukcyjnej tylko wtedy da pożądane wyniki, gdy wszystkie definicje

^{††} Autor, jak widzimy, używa słowa „*postulaty*” w sensie „*wytyczne*” lub „*przepisy*”. Niektóre z nich wymagają bardziej ścisłego przestrzegania, inne natomiast – jak w powyższym przykładzie – mniej.

i wszystkie dowody będą spełniać w pełni swe zadanie, a więc jeśli definicje wyjaśnią nam ponad wszelkie wątpliwości sens definiowanych terminów, dowody zaś przekonają nas o słuszności uzasadnianych praw. Nie zawsze łatwo sprawdzić, czy poszczególne definicje i dowody istotnie czynią zadość wymaganiom; może się zdarzyć, że rozumowanie, które jednemu człowiekowi wyda się przekonujące, dla drugiego nie będzie zrozumiałe. Aby usunąć wszelkie niepewności w tym zakresie, współczesna metodologia zmierza do tego, by przy badaniu definicji i dowodów subiektywną ocenę zastąpić kryteriami natury obiektywnej, by poprawność definicji i dowodów uzależnić wyłącznie od ich struktury – od zewnętrznej postaci. W tym celu wprowadza się specjalne REGUŁY DEFINIOWANIA i REGUŁY DOWODZENIA. Pierwsze mówią nam, jaką postać winny posiadać zdania przyjmowane w nauce za definicje, drugie zaś opisują, jakim przekształceniom wolno poddawać prawa nauki przy wyprowadzaniu z nich innych praw. Każda definicja musi być zbudowana zgodnie z regułami definiowania i każdy dowód musi być ZUPEŁNY, czyli musi polegać na kolejnym stosowaniu reguł dowodzenia do zdań uprzednio już uznanych za prawdziwe (por. § § 11 i 15). – Te nowe postulaty metodologiczne można nazwać postulatami FORMALIZACJI DEFINICJI I DOWODÓW; zaś o dyscyplinie skonstruowanej zgodnie z tymi nowymi przepisami mówimy, że jest SFORMALIZOWANĄ NAUKĄ DEDUKCYJNĄ.⁴

* * *

*Postulaty formalizacji zaostrzają znacznie formalny charakter matematyki. Już na wcześniejszym etapie naszych badań nad metodą dedukcyjną należało abstrahować od znaczenia wszystkich zwrotów specyficznych dla konstruowanej nauki i zachowywać się tak, jak gdybyśmy zamiast tych zwrotów mieli symbole zmienne pozbawione niezależnego znaczenia. Ale przynajmniej pojęciom logicznym wolno było przypisywać ich zwyczajowe znaczenie. W związku z tym aksjomaty i twierdzenia z zakresu matematyki mogliśmy traktować jeśli nie jako zdania, to przynajmniej jako funkcje zdaniowe, czyli wyrażenia, które mają formę gramatyczną zdań i wyrażają pewne własności przedmiotów lub relacji między nimi. Wyprowadzić jakieś

⁴Pierwsze próby przedstawienia nauk dedukcyjnych w postaci sformalizowanej pochodzą od cytowanego już dwukrotnie logika FREGE'GO (por. ods. 2, str. 20 oraz ods. 4, str. 85). Wysoki poziom formalizacji uzyskał w swych pracach polski logik S. LEŚNIEWSKI (1886–1939); jednym z jego osiągnięć jest dokładne i wyczerpujące sformułowanie reguł definiowania.

twierdzenie z przyjętych aksjomatów (lub z twierdzeń wcześniej udowodnionych) znaczyło tyle, co pokazać w przekonujący sposób, że wszystkie przedmioty, które spełniają aksjomaty, spełniają również dane twierdzenie; dowody matematyczne nie odbiegały więc znacznie od potocznych rozważań. Obecnie należy jednak abstrahować od sensu wszystkich bez wyjątku terminów napotkanych w danej nauce i przy rozwijaniu teorii dedukcyjnej o zdaniach trzeba myśleć jako o konfiguracji znaków, pozbawionych wszelkiej treści. Każdy dowód sformalizowanej nauki polega na poddaniu aksjomatów lub uprzednio udowodnionych twierdzeń szeregowi czysto zewnętrznych przekształceń.*

* * *

W świetle współczesnych wymagań logika, jako podstawa nauk matematycznych, odgrywa znacznie ważniejszą rolę niż dawniej. Nie zadowala już raczej przeświadczenie, że – dzięki wrodzonym lub nabytym zdolnościom poprawnego myślenia – rozumiemy zgodnie z regułami logiki. Aby przeprowadzić dowód zupełny twierdzenia, musimy wykonywać przekształcenia zgodne z regułami dowodzenia nie tylko na zdaniach należących do nauki, którą uprawiamy, ale również na zdaniach logiki (i innych przyjętych nauk wcześniejszych). W tym celu musimy rozporządzać pełną listą praw logicznych, odpowiednich do konstruowania dowodu.

Jedynie dzięki rozwojowi logiki dedukcyjnej potrafimy już dziś, przynajmniej teoretycznie, przedstawić każdą dyscyplinę matematyczną w postaci sformalizowanej. W praktyce jednak pociąga to za sobą wciąż liczne komplikacje; to, co wykład zyskuje na ścisłości i poprawności metodologicznej, traci na przejrzystości i przystępności. Cała ta kwestia jest wciąż dość świeżej daty, badania nad nią nie zostały jeszcze definitywnie zakończone, i można się spodziewać, że dalszy postęp przyniesie znaczne uproszczenia.[†] Stosowanie się w pełni

[†]Od czasu wczesnych wydań *Wprowadzenia do logiki* niewątpliwie poczyniono w tej kwestii rozmaite ulepszenia i uproszczenia. Tym nie mniej sformalizowany wykład nauki matematycznej wciąż jest obciążony wspomnianymi znacznymi komplikacjami i brakiem przystępności. Taki wykład mógłby służyć pewnym specjalnym celom, ale obecnie – podobnie jak niegdyś – nie nadaje się zbyt jako wprowadzenie do omawianej nauki. – Chcielibyśmy tu zaznaczyć, że poza wyeliminowaniem niepewności (o czym mowa w tekście) formalizacja odgrywa inną ważną rolę. Istotnie, rozmaite kwestie metodologiczne (wśród nich zagadnienia rozważane w § § 41-42 i 59-60) wymagają najpierw znalezienia odpowiedzi na następujące pytanie: Czym jest dowód? Innymi słowy: Czym są jego definiujące

do postulatów formalizacji przy popularnym przedstawieniu którejkolwiek z dziedzin matematyki wydaje się jeszcze cokolwiek przedwczesne. W szczególności nie byłoby racjonalne wymaganie, by w normalnym podręczniku jakiejś nauki matematycznej dowody twierdzeń podawać w postaci zupełnej. Powinniśmy jednak oczekiwać od autora podręcznika intuicyjnej pewności, że wszystkie jego (czy jej) dowody dadzą się doprowadzić do tej postaci, a nawet chcielibyśmy, by dochodził w rozważaniach do takiego punktu, gdzie czytelnik z pewnym doświadczeniem w myśleniu dedukcyjnym i dostateczną znajomością współczesnej logiki byłby w stanie bez większej trudności wypełnić pozostałe luki.

§41 Niesprzeczność i zupełność nauki dedukcyjnej; zagadnienie rozstrzygalności

Rozważymy teraz dwa pojęcia metodologiczne, bardzo ważne z teoretycznego punktu widzenia, choć pozbawione większego znaczenia pod względem praktycznym, mianowicie pojęcia NIESPRZECZNOŚCI i ZUPEŁNOŚCI.

Naukę dedukcyjną nazywamy NIESPRZECZNĄ, jeśli żadne dwa prawa tej nauki nie są wzajemnie sprzeczne lub, innymi słowy, jeśli z dowolnych dwóch zdań sprzecznych (por. § 7) choć jedno nie daje się udowodnić. Natomiast naukę nazywamy ZUPEŁNĄ, jeśli choć jedno z dowolnych dwóch zdań sprzecznych, sformułowanych całkowicie za pomocą terminów rozważanej nauki (i nauk wcześniejszych) daje się uzasadnić na gruncie tej nauki. Z kolei jeśli zdanie jest takie, że jego negacja daje się udowodnić w danej nauce, to mówi się, że zdanie to można OBALIĆ w tej nauce. Używając podanej terminologii możemy więc powiedzieć, że nauka dedukcyjna jest niesprzeczna, jeśli żadne ze zdań nie da się jednocześnie udowodnić i obalić na gruncie tej nauki; nauka jest zupełna, jeśli każde zdanie sformułowane przy zastosowaniu terminów tej nauki daje się udowodnić lub obalić na jej gruncie. Oba terminy „*niesprzeczna*” i „*zupełna*” stosujemy powszechnie nie tylko do samej nauki, lecz również do systemu aksjomatycznego, na którym nauka jest oparta.

Spróbujmy wyjaśnić sobie, na czym polega doniosłość powyższych pojęć. Każda nauka, choćby najpoprawniej skonstruowana pod względem metodologicznym, traci wartość w naszych oczach, jeśli mamy

własności? Rzecz jasna, na takie pytanie można dokładnie odpowiedzieć wyłącznie wtedy, gdy się ma do czynienia z naukami sformalizowanymi.

podstawy do przypuszczenia, że nie wszystkie prawa tej nauki są zdaniami prawdziwymi. Z drugiej strony wartość nauki jest niewątpliwie tym większa, im więcej zdań prawdziwych daje się uzasadnić na jej gruncie. Z tego punktu widzenia za ideał można uważać tę naukę, która wśród swych praw zawiera wszystkie zdania prawdziwe z danego zakresu, a nie zawiera ani jednego zdania fałszywego. Za zdania „z danego zakresu” uważamy tutaj zdania, które są wyrażone wyłącznie za pomocą terminów rozważanej nauki oraz terminów nauk wcześniejszych; trudno byłoby przecież wymagać, by na gruncie arytmetyki dawały się uzasadnić, powiedzmy, wszystkie zdania prawdziwe zawierające pojęcia z zakresu chemii czy też biologii. – Wyobraźmy sobie teraz, że nauka dedukcyjna jest sprzeczna, a więc, że wśród twierdzeń tej nauki występują jakieś dwa zdania sprzeczne. Z prawa sprzeczności (por. § 13) wynika, że jedno z tych zdań musi być fałszywe. Jeśli natomiast nauka nie jest zupełna, to istnieją dwa zdania sprzeczne (w rozważanym zakresie), z których żadne nie daje się udowodnić na gruncie tej nauki; w myśl jednak innego prawa, mianowicie prawa wyłączonego środka, jedno z tych zdań musi być prawdziwe. Widzimy więc, że nauka dedukcyjna nie może zrealizować naszego ideału, o ile nie jest zarazem niesprzeczna i zupełna. (Nie chcemy przez to bynajmniej powiedzieć, że każda nauka niesprzeczna i zupełna realizuje *ipso facto* nasz ideał, to znaczy, że jej aksjomaty i twierdzenia obejmują koniecznie wszystkie zdania prawdziwe z rozważanego zakresu i tylko te zdania; bowiem także nauka zawierająca fałszywy aksjomat mogłaby być niesprzeczna i zupełna.)

Na rozważane przez nas zagadnienia można spojrzeć jeszcze inaczej. Rozwój każdej nauki dedukcyjnej polega na formułowaniu pytań typu „*czy jest tak a tak?*” z zastosowaniem terminów tej nauki, a następnie próbowaniu znalezienia odpowiedzi w oparciu o przyjęte aksjomaty. Rzecz jasna, każde zagadnienie tej postaci można rozstrzygnąć dwójako: twierdząco lub przecząco. W pierwszym przypadku odpowiedź brzmi „*jest tak a tak*”, w drugim – „*nie jest tak a tak*”. Niesprzeczność i zupełność systemu aksjomatycznego nauki dedukcyjnej gwarantuje nam, że każde zagadnienie opisanego tu typu rzeczywiście daje się rozstrzygnąć na gruncie tej nauki i to tylko w jeden sposób; niesprzeczność wyklucza możliwość dwóch rozwiązań – pozytywnego i negatywnego zarazem, podczas gdy zupełność daje nam pewność, że przynajmniej jedno z tych rozwiązań da się uzyskać.

* * *

Z zupełnością ściśle wiąże się inne zagadnienie, ogólniejszej natury, które dotyczy nauk zarówno niezupełnych, jak zupełnych. Zagadnienie to polega na znajdowaniu – dla danej nauki dedukcyjnej – ogólnej mechanicznej metody, czyli ALGORYTMU, który umożliwiłby nam ustalenie, czy jakiekolwiek zdanie (z omawianego zakresu, por. wyżej) da się udowodnić na gruncie tej nauki. W takim przypadku mówi się o ROZSTRZYGANIU, czy zdanie da się udowodnić; to ważne zagadnienie znane jest pod nazwą ZAGADNIENIA ROZSTRZYGALNOŚCI^{5†}; o teoriach, dla których zagadnienie to ma pozytywne rozwiązanie, mówi się, że są ROZSTRZYGALNE.^{††}

* * *

Znamy niewiele nauk dedukcyjnych, które posiadają niesprzeczne i zupełne systemy aksjomatyczne. Z reguły są to nauki elementarne o prostej strukturze logicznej i ubogim zasobie pojęć. Jako przykład może służyć omówiony w rozdziale II rachunek zdań, o ile potraktujemy go jako osobną teorię dedukcyjną, a nie jako dział logiki (jeśli jednak zastosujemy do niej termin „*zupełna*”, to jego znaczenie należy nieco zmodyfikować). Niewykluczone, że najbardziej interesującym przykładem nauki niesprzecznej i zupełnej jest elementarna geometria – mamy tu na myśli geometrię w takim wymiarze, w jakim od wieków naucza się jej w szkołach, czyli jako dział elementarnej matematyki; innymi słowy, chodzi tu o dyscyplinę, w której bada

⁵Na doniosłość pojęć omawianych w tym paragrafie – zwłaszcza wagę dowodów niesprzeczności i zagadnienia rozstrzygalności – zwrócił uwagę HILBERT (por. ods. 2, str. 125), który stymulował wiele ważnych badań nad podstawami matematyki. Dzięki jego inicjatywie pojęcia te oraz zagadnienia stały się przedmiotem intensywnych studiów prowadzonych przez licznych matematyków i logików.

[†]W odsyłaczu 5 Autor mówi o ogólnym zagadnieniu rozstrzygalności dla matematyki. Rzeczywiście, wczesne badania metodologiczne stawiały intrygujące pytania w rodzaju: Czy da się znaleźć algorytm dla rozwiązania wszystkich rodzajów zagadnień występujących w matematyce? Czy zagadnienia te upodobnią się wobec tego do ćwiczeń rachunkowych wykonywanych na liczbach, nie wymagających żadnej pomysłowości? Obecnie wiemy, że takich algorytmów nie da się zbudować; por. dalszy tekst. Tak więc zamiast ogólnego zagadnienia rozstrzygalności mamy zagadnienia rozstrzygalności dla różnych dyscyplin matematycznych.

^{††}Rozważania na temat zagadnienia rozstrzygalności prowadzą nas do innego tematu. Zagadnienie to z natury rzeczy wymaga badania rozmaitych algorytmów lub mechanicznych procedur, zaś algorytmy wszelkiego rodzaju interesują tych, którzy pracują z komputerami. W rzeczy samej, między badaniami metodologicznymi a INFORMATYKĄ istnieją różnorodne związki i analogie. Przykłady na to dostarczają zagadnienia rozstrzygalności.

się własności rozmaitych figur geometrycznych specjalnego rodzaju – proste, płaszczyzny, trójkąty, koła, ale do której nie wchodzi ogólne pojęcie konfiguracji geometrycznej (zbioru punktów).⁶

Sytuacja zmienia się w sposób zasadniczy przy przejściu do takich nauk jak arytmetyka i geometria nie-elementarna. Nikt z ludzi, uprawiających te nauki raczej nie wątpi w ich niesprzeczność, tym nie mniej, jak pokazują badania metodologiczne, każda próba udowodnienia ich niesprzeczności doprowadzi do znacznych trudności natury zasadniczej. Jeszcze gorzej przedstawia się kwestia zupełności. Okazuje się, że zarówno arytmetyka, jak geometria nie są zupełne; skonstruowano mianowicie takie zagadnienia o charakterze czysto arytmetycznym lub geometrycznym, których na gruncie tych nauk nie da się rozwiązać ani pozytywnie, ani negatywnie. Można by przypuszczać, że fakt ten odzwierciedla po prostu niedoskonałości systemu aksjomatycznego i metod dowodzenia, którymi obecnie dysponujemy, i że przez odpowiednią modyfikację (powiedzmy, rozszerzenie systemu aksjomatycznego) uda się w przyszłości uzyskać systemy zupełne. Pewne dogłębne badania metodologiczne wykazały jednak, że nauki te są niezupełne w bardzo głębokim sensie: *nigdy nie uda się zbudować niesprzecznej i zupełnej nauki dedukcyjnej, która by zawierała jako twierdzenia wszystkie zdania prawdziwe arytmetyki lub geometrii nie-elementarnej*. Okazuje się, że również zagadnienie rozstrzygalności nie ma pozytywnego rozwiązania w tych naukach; nie udaje się znaleźć ogólnej metody, która pozwoliłaby nam mechanicznie odróżniać zdania, dające się udowodnić na gruncie tych nauk, od zdań, których udowodnić się nie da. – Wyniki te dotyczą wielu innych nauk dedukcyjnych, a w szczególności nauk, dla których arytmetyka liczb całkowitych lub arytmetyka liczb naturalnych (czyli nauka o czterech podstawowych działaniach matematycznych na odpowiednich liczbach) jest wcześniejsza lub też nauk, które zawierają składniki umożliwiające rozwinięcie takiej arytmetyki. *Rezultaty te,

⁶Pierwszy dowód zupełności dla rachunku zdań (i tym samym pierwsze pozytywne wyniki w badaniach nad zupełnością) zawdzięczamy amerykańskiemu logikowi E. L. POSTOWI (1897–1954). Dowód zupełności (i rozstrzygalności) dla elementarnej geometrii pochodzi od Autora.

na przykład, można zastosować do ogólnej teorii klas (co wynika z rozważań w ostatniej części § 26)*.^{7‡}

W świetle tych ostatnich uwag staje się rzeczą zrozumiałą, że pojęcia niesprzeczności i zupełności – mimo swej teoretycznej doniosłości – wywierają praktycznie niewielki wpływ na budowę nauk dedukcyjnych.^{‡‡}

§42 Rozszerzone pojęcie metodologii nauk dedukcyjnych

Badania niesprzeczności i zupełności przyczyniły się bardzo istotnie do rozwoju dziedziny i poszerzenia zakresu badań metodologicznych; badania te doprowadziły nawet do podstawowej zmiany całego charakteru metodologii nauk dedukcyjnych. Pojęcie metodologii opisane na początku rozdziału okazało się – w trakcie historycznego rozwoju przedmiotu – zbyt wąskie. Analiza oraz krytyczna ocena metod konstruowania nauk dedukcyjnych przestały być wyłącznym czy nawet głównym zadaniem metodologii. *Metodologia nauk dedukcyjnych stała się ogólną teorią nauk dedukcyjnych w sensie analogicznym do*

⁷Te niebывale ważne osiągnięcia zawdzięczamy amerykańskiemu logikowi (austriackiego pochodzenia) K. GÖDLOWI (1906–1978). Jego wyniki badań nad zagadnieniem rozstrzygalności zostały później poszerzone przez amerykańskiego logika A. CHURCHA (1903–).

[‡]Może okazać się pomocna następująca rekapitulacja: niezupełność i odpowiednie wyniki ustalono najpierw dla arytmetyki liczb naturalnych (wyniki te łatwo dają się przenieść na liczby całkowite). Arytmetykę tę można rozwinąć w ramach teorii mnogości (lub teorii klas), wobec czego wyniki, o których tu mowa, stosują się również do tej teorii. Stosują się one także do teorii, dla których teoria mnogości jest teorią wcześniejszą; są nimi tzw. teorie nie-elementarne, a przykładem – geometria nie-elementarna.

^{‡‡}Ten prosty wniosek należy chyba opatrzyć pewnym zastrzeżeniem. Z pewnością jest on słuszny, gdy ktoś próbuje zbudować od nowa naukę, która już jest ustalona, zaś wiarę w jej niesprzeczność popierają lata doświadczeń, nawet jeśli brak odpowiednich dowodów. Sytuacja ulega jednak zmianie, gdy w grę wchodzi nowa teoria, bez doświadczenia. W tym przypadku nowicjusz mógłby pomyśleć, że wolno mu tolerować kilka zdań udowodnionych wraz z ich zaprzeczeniami. Tymczasem jego teoria nie miałaby żadnej wartości, ponieważ podstawowe prawo metodologiczne (por. ćwiczenie *11) pokazuje, że w teorii, która jest sprzeczna, każde zdanie daje się udowodnić. – Z drugiej strony, niezupełność sama w sobie nie dyskwalifikuje teorii. Tak więc, gdy buduje się nową teorię, należy zwracać baczną uwagę na to, by unikać sprzeczności, ale nie trzeba się przejmować, jeśli zbudowana nauka okaże się niezupełna.

tęgo, w którym arytmetyka jest teorią liczb, geometria zaś – teorią figur geometrycznych. We współczesnej metodologii badamy nauki dedukcyjne jako całość, jak również poszczególne zdania, które się na nie składają; rozważamy symbole i wyrażenia, z których zdania takie są zbudowane; analizujemy własności oraz zbiory wyrażeń i zbiory zdań; relacje, które zachodzą między nimi (takie jak relacja wynikania), a nawet relacje między wyrażeniami i przedmiotami, o których wyrażenia te „mówią” (takie jak relacja oznaczania); ustalamy ogólne prawa rządzące tymi pojęciami.[†]

* * *

*W związku z tym powinniśmy zauważyć, co następuje: terminy, które oznaczają wyrażenia występujące w naukach dedukcyjnych, jak również terminy oznaczające własności tych wyrażeń lub relacji między nimi, należą do metodologii nauk dedukcyjnych, a nie do dziedziny logiki. Dotyczy to w szczególności rozmaitych terminów, które wprowadziliśmy i stosowaliśmy we wcześniejszych rozdziałach – takich jak „*zmienna*”, „*funkcja zdaniowa*”, „*kwantyfikator*”, „*następnik*” i wiele innych. Aby wyjaśnić sobie różnicę między terminami logicznymi i metodologicznymi, rozważmy parę słów: „*lub*” i „*alternatywa*”. Słowo „*lub*” należy do rachunku zdań – a tym samym do logiki – choć używa się go we wszystkich innych naukach, nie wyłączając metodologii. Słowo „*alternatywa*” natomiast oznacza zdanie zbudowane za pomocą słowa „*lub*” i jest typowym przykładem terminu metodologicznego.

Czytelnik przypuszczalnie zdziwi się, uświadomiwszy sobie, że w rozdziałach poświęconych logice stosowaliśmy tyle terminów metodologicznych. Stosunkowo łatwo to wytłumaczyć. Jak pokazano w § 9, grają tu rolę pewne okoliczności: wśród logików, jak również wśród matematyków, istnieje szeroko rozpowszechniony zwyczaj używania – czasami z czysto stylistycznych względów – zwrotów, zawierających terminy metodologiczne, w roli synonimów dla wyrażeń o charakterze czysto logicznym lub matematycznym. W książce do pewnego stopnia postępujemy zgodnie z tym zwyczajem. Z drugiej jednak strony, wchodzi tu w grę ważniejszy czynnik; na razie tu nie próbowaliśmy

[†]Można tu dodać, że słynne badania prawdy prowadzone przez Autora znajdują swe naturalne miejsce, jako dział tej metodologii. Mając bowiem do czynienia z zagadnieniem prawdy, zajmujemy się powiązaniami między wyrażeniami (w tym przypadku, zdaniami) oraz między przedmiotami, do których się wyrażenia te odnoszą, czy też o których „mówią”.

budować logiki w sposób systematyczny, raczej opowiadaliśmy o logice, omawialiśmy i komentowaliśmy jej pojęcia i prawa. Wiemy jednakże (z § 18), że mówiąc o wyrażeniach logicznych, musimy używać nazw tych wyrażen, a nazwy te są terminami należącymi do metodologii. Gdybyśmy rozwijali logikę w postaci teorii dedukcyjnej, bez żadnych komentarzy na ten temat, to terminy metodologiczne winny występować tylko w sformułowaniach reguł definiowania i dowodzenia.*

* * *

W trakcie ewolucji, którą przeszła metodologia, powstała potrzeba zastosowania na tym polu nowych, subtelniejszych i dokładniejszych metod badawczych. Metodologia przyjęła postać dyscypliny dedukcyjnej – i faktycznie stała się podobna naukom, którymi się sama zajmuje. Wobec poszerzonego pola badań wyrażenie „*metodologia nauk dedukcyjnych*” nie wydaje się już odpowiednie; w rzeczy samej, słowo „*metodologia*” znaczy w zasadzie „*nauka o metodzie*”. Wobec tego wyrażenie to zastępuje się często innymi określeniami – przeważnie terminami „METALOGIKA” i „METAMATEMATYKA”, które znaczą mniej więcej „*nauka o logice*” i „*nauka o matematyce*”. Używa się też innego terminu, „SYNTAKTYKA I SEMANTYKA NAUK DEDUKCYJNYCH”, który podkreśla analogię między metodologią nauk dedukcyjnych a gramatyką i interpretacją języka codziennego.^{8†}

⁸Metodologia nauk dedukcyjnych w rozszerzonym sensie jest dyscypliną młodszą od innych dyscyplin rozważanych w tej książce. Jej intensywny rozwój rozpoczął się dopiero po roku 1920 – równocześnie (i jak się wydaje, niezależnie) w dwóch różnych ośrodkach: w Göttingen, pod wpływem HILBERTA i szwajcarskiego logika P. BERNAYSA (1888–1977) oraz w Warszawie, gdzie pracowali LEŚNIEWSKI I ŁUKASIEWICZ (por. ods.: 2, str. 125; 4, str. 139; 2, str. 20). Fundamentalnym dziełem w tym zakresie jest praca HILBERTA i BERNAYSA *Grundlagen der Mathematik* (Berlin 1934, 1939). Aparat pojęciowy i aspekty filozoficzne nowej dyscypliny omówione zostały w pismach amerykańskiego filozofa i logika (niemieckiego pochodzenia) R. CARNAPA (1891–1970); jego najwcześniejsza praca w tym kierunku to *Logische Syntax der Sprache* (Wiedeń 1934).

^{††}Nauki metodologiczne (metamatematyka, metalogika) wciąż się rozwijają; obecnie mają kilka odgałęzień, wśród nich: TEORIĘ MODELI i TEORIĘ DOWODU. Pierwsza zajmuje się realizacjami lub modelami systemów aksjomatycznych (czyli semantyką), druga zaś – zagadnieniami dedukcji (a więc sprawami formy i syntaksy.)

Ćwiczenia

1. Wskazać kilka interpretacji systemu aksjomatycznego, rozważanego w § 37, na gruncie arytmetyki i geometrii.

Czy zbiór wszystkich liczb wraz z relacją mniejszości między liczbami stanowią model tego systemu aksjomatycznego? Czy zbiór wszystkich prostych i relacja równoległości między prostymi tworzą taki model?

2. We fragmencie geometrii, którym zajmowaliśmy się w § 37, relację mniejszości między odcinkami można zdefiniować w następujący sposób:

mówimy, że x jest mniejsze od y , czyli $x < y$, jeśli x i y są odcinkami i jeśli x jest przystające do odcinka, będącego częścią y ; innymi słowy, jeśli $x \in \mathcal{O}$, $y \in \mathcal{O}$ i jeśli istnieje taki przedmiot z , że $z \in \mathcal{O}$, $z \subseteq y$, $z \neq y$ oraz $x \cong z$.

Wyróżnić w powyższym zdaniu definiendum i definiens; określić nauki (ewentualnie działy logiki), do których należą terminy występujące w definiens. Czy definicja ta czyni zadość ogólnym zasadom metodologicznym z § 36 oraz regułom definiowania z § 11?

3. Czy dowód Twierdzenia 1 w postaci podanej w § 37, jest dowodem zupełnym, jeśli brać pod uwagę tylko reguły dowodzenia omówione w § 15?

4. Poza Twierdzeniami 1 i 2 z aksjomatów podanych w § 37 można wyprowadzić następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 3. *Dla dowolnych elementów x , y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $x \cong y$ i $x \cong z$, to $y \cong z$.*

TWIERDZENIE 4. *Dla dowolnych elementów x , y i z zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $x \cong y$ i $y \cong z$, to $x \cong z$.*

TWIERDZENIE 5. *Dla dowolnych elementów x , y , z i t zbioru $\mathcal{O}$, jeśli $x \cong y$, $y \cong z$ i $z \cong t$, to $x \cong t$.*

Udowodnić szczegółowo, że następujące układy zdań są równoważne – w sensie ustalonym w § 39 – z systemem składającym się z Aksjomatów 1 i 2 (i że wobec tego każdy z tych systemów mógłby być przyjęty za nowy system aksjomatyczny):

- (a) system składający się z Aksjomatu 1 i Twierdzeń 1 i 2;
- (b) system składający się z Aksjomatu 1 i Twierdzenia 3;
- (c) system składający się z Aksjomatu 1 i Twierdzenia 4;
- (d) system składający się z Aksjomatu 1 i Twierdzeń 1 i 5.

5. Wzorując się na uwagach w § 37 sformułować ogólne prawa teorii relacji, które zawierałyby uogólnienia wyników otrzymanych w poprzednim ćwiczeniu.

Wskazówka. Prawa te można podać w postaci równoważności, które zaczynałyby się od słów:

na to, by relacja R była zwrotna i posiadała własność $\mathcal{W}$ w klasie K , potrzeba i wystarczy, że ...

6. Rozważyć układ zdań (a) z ćwiczenia 4. Wskazać modele spełniające

- (a) pierwsze dwa zdania układu, ale nie ostatnie;
- (b) pierwsze i trzecie zdanie, ale nie drugie;
- (c) ostatnie dwa zdania układu, ale nie pierwsze.

Jaki wniosek można wyciągnąć z istnienia takich modeli odnośnie możliwości wyprowadzenia jednego (któregokolwiek z trzech) zdania z pozostałych dwóch? Czy zdania te są wzajemnie niezależne? (Por. §§ 37 i 39.)

7. Słyszy się niekiedy narzekania na pewną niezgodność między rozmaitymi podręcznikami szkolnymi geometrii: prawa, które w jednych podręcznikach traktuje się jako twierdzenia, w innych przyjmuje się bez dowodu jako aksjomaty. Czy narzekania te są uzasadnione?

***8.** W § 13 zapoznaliśmy się z metodą tabelk prawdziwościowych rozstrzygania, czy dane zdanie rachunku zdań jest prawdziwe i czy zatem można je uważać za prawo tego rachunku. Stosując ją, wolno nam zupełnie zapomnieć, co oznaczają występujące w tabelce symbole „1” i „0” i przyjąć, że metoda ta sprowadza się do zastosowania dwóch reguł w konstruowaniu rachunku zdań, gdzie pierwsza

jest zbliżona do reguł definiowania, druga zaś – do reguł dowodzenia. Zgodnie z pierwszą regułą, jeśli chcemy wprowadzić do rachunku zdań stały termin, musimy zacząć od skonstruowania podstawowej tabelki prawdziwościowej dla najprostszej funkcji zdaniowej zawierającej ten termin i tylu osobnych zmiennych, ilu może on dotyczyć. Według drugiej reguły, jeśli chcemy zdanie uważać za prawo rachunku zdań (gdzie zdanie to zawiera tylko te stałe, dla których skonstruowano podstawowe tabelki prawdziwościowe), musimy skonstruować pochodną tabelkę prawdziwościową dla tego zdania i upewnić się, że w ostatniej kolumnie pojawia się tylko symbol „1”.

W oparciu o rozważania w § 40 uzasadnić stwierdzenie, że rachunek zdań, skonstruowany wyłącznie w oparciu o te reguły, przyjmuje charakter bliski sformalizowanym teoriom dedukcyjnym. Istnieją jednak pewne różnice między tą metodą konstruowania rachunku zdaniowego a głównymi zasadami konstruowania teorii dedukcyjnych, omówionymi w § 36. Czy stosując metodę tabel prawdziwościowych da się odróżnić w rachunku zdań terminy pierwotne od zdefiniowanych? Jakie inne rozróżnienie zaciera się wówczas?

***9.** Metoda tabel prawdziwościowych, zgodnie z tym co napisano w poprzednim ćwiczeniu, pozwala nam na dodanie do rachunku zdań nowych terminów, których nie omawiano w Rozdziale II. Na przykład można wprowadzić symbol „ Δ ” taki, by funkcja zdaniowa:

$$p \Delta q$$

uważana była za symboliczną postać wyrażenia:

$$\text{ani } p \text{ ani } q.$$

Skonstruować podstawową tabelkę prawdziwościową dla funkcji, która odpowiadałaby znaczeniu intuicyjnie przypisywanemu symbolowi „ Δ ”, a następnie upewnić się za pomocą pochodnych tabel prawdziwościowych, że następujące zdania są prawdziwe i, że wobec tego wolno nam uważać je za prawa rachunku zdań:

$$\sim p \leftrightarrow (p \Delta p),$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow [(p \Delta q) \Delta (p \Delta q)],$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \{[(p \Delta p) \Delta q] \Delta [(p \Delta p) \Delta q]\}.$$

***10.** Omówiona w ćwiczeniu *8 metoda konstruowania rachunku zdań dostarcza natychmiastowego rozwiązania zagadnienia rozstrzygalności (por. § 41) dla tego rachunku i umożliwia nam łatwe uzasadnienie, że rachunek zdań jest teorią niesprzeczną. W jaki sposób można wykazać własności tej metody?

***11.** Jedno z praw rachunku zdań brzmi:

Dla dowolnych p i q , jeśli p i nie p , to q .

Na podstawie powyższego prawa ustalić następujące prawo metodologiczne (por. ćwiczenie *20 z rozdziału II dotyczące reguły dla koniunkcji):

Jeśli system aksjomatyczny nauki dedukcyjnej, dla której rachunek zdań jest nauką wcześniejszą, nie jest niesprzeczny, to każde zdanie utworzone przy zastosowaniu terminów tej teorii da się wyprowadzić z tego systemu.

***12.** Wiadomo, że obowiązuje następujące prawo metodologiczne:

Jeśli system aksjomatyczny teorii dedukcyjnej jest zupełny i jeśli dodamy do tego systemu dowolne zdanie, które da się sformułować, ale nie da się udowodnić w zakresie tej teorii, to poszerzony w ten sposób system aksjomatyczny przestaje być niesprzeczny.

Dlaczego tak się dzieje?

***13.** Spośród wszystkich terminów pojawiających się w rozdziale II, wyłonić te, które należą do zakresu metodologii nauk dedukcyjnych, zgodnie z uwagami w § 42.

* * *

Ćwiczenia dodatkowe. – Poniższe ćwiczenia, numerowane od D1 do D19, mają na celu umożliwienie Czytelnikowi rzucenia okiem na teorie sformalizowane i dowody zupełne.[†] Rozważamy tu trzy teorie: teorię przystawiania odcinków, część algebry klas oraz rachunek zdań.

[†]Ćwiczenia te (ulożone przez redaktora) proponuje się w miejsce kilku ćwiczeń zawartych w poprzednich wydaniach książki. – Dla porządku podajemy numery ćwiczeń, z których zrezygnowano: 1–3, 13–16 i część 17 (z dwudziestu). Pozostałym ćwiczeniom zmieniono numerację.

W przypadku pierwszych dwu przyjmujemy, że jedyną nauką wcześniejszą jest rachunek zdań. Będziemy uważać go tu za teorię, określoną przez tabelki prawdziwościowe; por. ćwiczenie *8. (Kładziemy na to nacisk, ponieważ ćwiczenia ostatniej grupy dotyczą alternatywnego sformułowania rachunku zdań.) – W grę będą wchodzić trzy reguły dowodzenia, zezwalające na: (i) podstawianie za zmienne zdaniowe funkcji zdaniowych, (ii) podstawianie za ZMIENNĄ INDYWIDUOWĄ innej zmiennej (chodzi tu o zmienne, które odnoszą się do omawianych indywidualnych przedmiotów; w tych dwóch przykładach – do odcinków i klas), oraz (iii) odrywanie. Dla uproszczenia zrezygnujemy z kwantyfikatorów ogólnych; sposób posługiwania się nimi omówiliśmy w § 15.

W każdym z następujących ćwiczeń należy udowodnić podane twierdzenie (chyba, że polecenie brzmi inaczej). W przypadku pierwszych dwóch teorii dowody wymagają rozmaitych praw rachunku zdań, których czytelnik może jeszcze nie znać, a które podajemy zwykle we „wskazówkach”. Czytelnik powinien się przekonać, że prawa te są rzeczywiście słuszne, nawet jeśli nie przeprowadzi szczegółowego ich sprawdzenia.

* * *

W pierwszych ćwiczeniach opisujemy teorię przystawiania odcinków zgodnie z § 37 oraz ćwiczeniami 3 i 4. Jedynym terminem pierwotnym jest „ $\cong$ ” (jeśli nie brać pod uwagę terminów z rachunku zdań oraz symbolu „ $\mathcal{O}$ ” oznaczającego dziedzinę teorii, ale symbol dziedziny teorii nie występuje bezpośrednio we wzorach). Mamy dwa aksjomaty:

AKSJOMAT 1. $x \cong x$.

AKSJOMAT 2. $(x \cong z \wedge y \cong z) \rightarrow x \cong y$.

D1. Udowodnić:

(a) $y \cong z \rightarrow z \cong y$;

(b) $y \cong z \leftrightarrow z \cong y$.

Wskazówka.

(a). W Aksjomatach 1 i 2 podstawić „ z ” za „ x ” i wykorzystać prawo:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)].$$

Podstawić w nim „ $z \cong z$ ” za „ p ” oraz odpowiednie wyrażenia za „ q ” i „ r ” (wobec czego „ $q \rightarrow r$ ” stanie się prawem, które należy udowodnić)

i oderwać po kolei przekształcone Aksjomaty 2 i 1. (b). Podstawić w (a) „ z ” za „ y ” i odwrotnie. W ten sposób otrzymamy odwrotność (a). Następnie posłużyć się prawem:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)].$$

Dokonać podstawień za „ p ” i „ q ” i oderwać: najpierw (a), następnie odwrotność (a).

D2. $(x \cong y \wedge y \cong z) \rightarrow x \cong z$.

Wskazówka. W Aksjomacie 2 „ $y \cong z$ ” chcemy najpierw zastąpić przez „ $z \cong y$ ”. Intuicyjnie przyjmujemy, że jest to uzasadnione równoważnością D1(b). Do przeprowadzenia dowodu zupełnego korzystamy z następującego prawa:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow \{[(r \wedge p) \rightarrow s] \rightarrow [(r \wedge q) \rightarrow s]\}.$$

Dokonać podstawień zmiennych zdaniowych, by „ $p \leftrightarrow q$ ” stało się wyrażeniem podanym w D1(b), zaś „ $(r \wedge p) \rightarrow s$ ” – wyrażeniem w Aksjomacie 2. Następnie dwukrotnie dokonać oderwania, po czym zamienić zmienne indywiduowe.

Uwaga: 1) byłoby z pożytkiem dla czytelnika porównać dowody w ćwiczeniu D1 z dowodem Twierdzenia 1 w § 37; 2) czytelnik powinien przyrzeć się uważnie dowodowi w ćwiczeniu D2, zwłaszcza prawu rachunku zdań. Dostarcza ono metody uzasadniania zamiany jednego równoważnego wyrażenia przez inne; okazję wykorzystania jej będziemy mieli także w dalszych ćwiczeniach.

Dodatkowo czytelnik może sformułować za pomocą symboli Twierdzenia 3–5 z ćwiczenia 4 i przeprowadzić dla nich dowody zupełne.

* * *

Dziedziną naszej drugiej teorii będzie pewien układ klas niepustych; układ ten sam jest klasą, którą możemy oznaczyć, powiedzmy, przez „ $\mathcal{U}$ ”. Mamy też dwa inne terminy pierwotne: „ $\subseteq$ ” (czyli „*jest zawarty w*”) i „ $\bowtie$ ” („*jest rozłączny z*”). Przyjmujemy pięć aksjomatów:

AKSJOMAT I. $K \subseteq K$.

AKSJOMAT II. $[(K \subseteq L) \wedge (L \subseteq M)] \rightarrow (K \subseteq M)$.

AKSJOMAT III. $(M \bowtie N) \rightarrow (N \bowtie M)$.

AKSJOMAT IV. $[(K \subseteq L) \wedge (L \bowtie M)] \rightarrow (K \bowtie M)$.

AKSJOMAT V. $(K \bowtie L) \rightarrow \sim (K \subseteq L)$.

Dla czytelnika może być pomocne ponowne przejście omówienia obu relacji w § 24 i naszkicowanie figur geometrycznych dla zilustrowania tych aksjomatów.^{††}

D3. Udowodnić:

- (a) $(M \supset N) \leftrightarrow (N \supset M)$;
- (b) $[(K \subseteq L) \wedge (M \supset L)] \rightarrow (K \supset M)$;
- (c) $(L \supset K) \rightarrow \sim (K \subseteq L)$.

Wskazówka. Do (a) zastosować Aksjomat III, dowód zaś jest analogiczny do wyprowadzenia D1(b) z D1(a). Do (b) i (c) zastosować (a) z podstawieniem oraz Aksjomaty IV i V, dowód przeprowadzić zaś tak, jak w D2.

D4. $(K \supset L) \rightarrow [\sim (K \subseteq L) \wedge \sim (L \subseteq K)]$.

Wskazówka. Wykorzystać prawo:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \{(p \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]\}.$$

Podstawić tak, by oderwać najpierw Aksjomat V, a potem wzór otrzymany z D3(c) przez podstawienie.

- D5.** (a) $(K \subseteq L) \rightarrow \sim (K \supset L)$;
 (b) $\sim (K \supset K)$.

Wskazówka. Do (a) zastosować Aksjomat V i następujący wariant prawa kontrapozycji (por. § 14):

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p).$$

Do (b) wykorzystać (a) i jeden z aksjomatów.

- D6.** (a) $[(K \subseteq L) \wedge (L \subseteq M)] \rightarrow \sim (K \supset M)$;
 (b) $[(K \subseteq L) \wedge (L \supset M)] \rightarrow \sim (K \subseteq M)$.

^{††}Zauważmy, że rozłączność rzadko uważa się za niezależną relację. Normalnie napisalibyśmy raczej „ $K \cap L = \emptyset$ ”, niż „ $K \supset L$ ” (mimo, że ostatnie stwierdzenie jest nieco silniejsze). Rozłączność wszelako pojawia się jako relacja w sylogizmach kategorycznych ARYSTOTELESA (por. ods. 1 na str. 20), zaś dwa z tych aksjomatów są właśnie sylogizmami z § 24. – Podane tu pięć aksjomatów jest wzajemnie niezależnych (patrz: ćwiczenie D8). – Ponadto zwykło się przyjmować, że dziedzina teorii jest niepusta, lecz założenie to nie odgrywałoby żadnej roli w tej teorii, czy też w teorii przystawiania odcinków.

Wskazówka. W (a) zacząć od Aksjomatu II. W D5(a) dokonać takich podstawień, by teza przyjęła postać wniosku w Aksjomacie II. Wykorzystać prawo sylogizmu hipotetycznego (w innym sformułowaniu, niż w § 13):

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)].$$

Za „ q ” podstawić ów wspólny wniosek i tezę, znaleźć odpowiednie podstawienia za „ p ” i „ r ”, dowód zaś zakończyć stosując regułę odrywania. W (b) zacząć od Aksjomatów IV i V, a następnie postępować jak w (a).

Wprowadzimy teraz za pomocą definicji nowy symbol. Definicję skonstruujemy zgodnie z regułami i uwagami w §§ 11 i 36; w szczególności podamy ją w postaci równoważności:

DEFINICJA I. $(K \bowtie L) \leftrightarrow \{\sim (K \supset L) \wedge [\sim (K \subseteq L) \wedge \sim (L \subseteq K)]\}$.

Nowy symbol oznacza relację krzyżowania się. Zauważamy trzy oczywiste własności tej relacji.

D7. Udowodnić:

- (a) $(K \bowtie L) \leftrightarrow (L \bowtie K)$;
- (b) $\sim (K \bowtie K)$;
- (c) $[(K \bowtie L) \vee (K \supset L)] \vee [(K \subseteq L) \vee (L \subseteq K)]$.

Wskazówka. Do (a) powinno się wykorzystać równoważność zdań, by w definicji zamienić „ K ” z „ L ”. Najpierw użyć D3(a) (z podstawieniem) oraz argument taki, jak w D2, by wykazać, że:

$$(K \bowtie L) \leftrightarrow \{\sim (L \supset K) \wedge [\sim (K \subseteq L) \wedge \sim (L \subseteq K)]\}.$$

Następnie zastosować „ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ ” i podobny argument, by wykazać, że:

$$(K \bowtie L) \leftrightarrow \{\sim (L \supset K) \wedge [\sim (L \subseteq K) \wedge \sim (K \subseteq L)]\}.$$

Dokonanie podstawienia w definicji daje równoważność między „ $L \bowtie K$ ” oraz prawą stroną. Doprowadzić dowód do końca opierając się na następującym prawie:

$$(p \leftrightarrow r) \rightarrow [(q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow q)],$$

gdzie za „ p ” należy podstawić „ $K \setminus L$ ”, za „ q ” zaś – „ $L \setminus K$ ”. W (b) podstawić w definicji „ K ” za „ L ” i zauważyć, że „ $\sim (K \subseteq K)$ ” jest sprzeczne z Aksjوماتem I. Skonstruować prawo rachunku zdań tak, by po wykonaniu podstawienia móc oderwać Aksjomat I oraz definicję i otrzymać pożądany wniosek. (Sprawdzić skonstruowane prawo.) W (c) potrzebna jest tylko definicja i odpowiednie prawo rachunku zdań.

Powyższy fragment algebry klas można rozwinąć dalej (3) wprowadzając następującą definicję (definicję „*inkluzji właściwej*” lub „*jest podklasą właściwą*”):

DEFINICJA II. $(K \subset L) \leftrightarrow [(K \subseteq L) \wedge \sim (L \subseteq K)]$.

Ambitny czytelnik mógłby tu sformułować i spróbować udowodnić kilka własności inkluzji właściwej. Własnością, która się pierwsza nasuwa, jest: $\sim (K \subset K)$.

D8. W Aksjوماتach I – V za „ $\subseteq$ ” podstawić symbol inkluzji właściwej „ $\subset$ ”. Potwierdzić (np. za pomocą argumentów takich, jak we Wskazówce do ćwiczenia 13 w rozdziale IV), że Aksjomy II – V pozostają słuszne w danej klasie $\mathcal{U}$, ale nie dotyczy to Aksjomatu I. Jaki wniosek można wyciągnąć odnośnie wyprowadzalności Aksjomatu I?

* * *

Trzecią rozważaną tu teorią jest rachunek zdań. Rachunek ten zostanie sformułowany jako teoria dedukcyjna, która jest w pełni zgodna z zasadami w §§ 36 i 40, a która nie korzysta z tabelek prawdziwościowych. – Jako terminy pierwotne przyjmujemy pięć zwykłych spójników w postaci symbolicznej: „ $\rightarrow$ ”, „ $\sim$ ”, „ $\leftrightarrow$ ”, „ $\vee$ ” oraz „ $\wedge$ ”. Regułami dowodzenia będą reguła podstawiania i reguła odrywania. (Przez podstawianie rozumiemy tu podstawienie zmiennej zdaniowej przez inną zmienną zdaniową lub przez złożoną funkcję zdaniową. Regułę tę należałoby sformułować dokładniej, z uwzględnieniem nawiasów. Nie jest to trudne, ale nie chcemy wchodzić tu w szczegóły.)

Wybieramy system 15 aksjomatów. Treść większości z nich powinna być czytelnikowi znajoma. Dzieli się one w sposób naturalny na pięć grup po trzy aksjomy w każdej[‡]:

[‡]Czytelnik zapewne pamięta uwagi z § 39 odnośnie włączania – w celach dydaktycznych – większej niż konieczna liczby aksjomatów. Tutaj Aksjomat IC da się wyprowadzić z IA–B, wobec czego jest zbędny. Zobaczmy, że w dowo-

- IA. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.
 IB. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.
 IC. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.

- IIA. $\sim\sim p \rightarrow p$.
 IIB. $p \rightarrow \sim\sim p$.
 IIC. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

- IIIA. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.
 IIIB. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.
 IIIC. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$.

- IVA. $p \rightarrow (p \vee q)$.
 IVB. $q \rightarrow (p \vee q)$.
 IVC. $(p \rightarrow r) \rightarrow \{(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]\}$.

- VA. $(p \wedge q) \rightarrow p$.
 VB. $(p \wedge q) \rightarrow q$.
 VC. $(p \rightarrow q) \rightarrow \{(p \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]\}$.

Zbadamy teraz wnioski wynikające z kolejnych grup aksjomatów. Zaczniemy od własności negacji, opierając się na aksjomatach z pierwszej grupy (zwłaszcza na Aksjomacie IC, który jest prawem sylogizmu hipotetycznego).

D9. Udowodnić: $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$.

Wskazówka. Wykonać podstawienie w IC tak, by pierwsza implikacja była: „ $q \rightarrow \sim\sim q$ ” i by „ r ” było zmienione na „ $\sim p$ ”. Wykonać podstawienie w IIB i zastosować regułę odrywania; w wyniku otrzymuje się:

$$(\sim\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \rightarrow \sim p).$$

Następnie wykonać podstawienie w IIC, by otrzymać:

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim\sim q \rightarrow \sim p).$$

dach aksjomat ten będzie bardzo często wykorzystywany, ale wyprowadzenie go jest nieco skomplikowane. Jeśli go jednak pominiemy, otrzymamy system aksjomatów wzajemnie niezależnych. – Aksjomatyczne podejście do rachunku zdań pochodzi od FREGE’GO; jak podano w odsyłaczu 4 na str. 139, w jego pracy spotykamy pierwsze systematyczne stosowanie dowodów zupełnych. Zamieszczony tu system aksjomatyczny został sformułowany na wzór systemu stworzonego przez BERNAYSA (patrz: ods. 8 na str. 147).

Widzimy, że wniosek zgadza się z poprzednim założeniem. Przywołać więc sylogizm i dokonać kolejnego zastosowania Aksjomatu IC z podstawieniem „ $p \rightarrow \sim q$ ” za „ p ” i „ $\sim \sim q \rightarrow \sim p$ ” za „ q ”.

D10. $p \rightarrow p$.

Wskazówka. Prosty dowód opiera się na Aksjomatach IIA–B i na prawie sylogizmu (IC), w którym należy podstawić „ p ” za „ r ” i „ $\sim \sim p$ ” za „ q ” i dwukrotnie zastosować regułę odrywania.

Uwaga: Czytelnik powinien rozpoznawać sytuacje, w których wniosek jednego twierdzenia zgadza się z hipotezą drugiego, wtedy bowiem można zastosować Aksjomat IC. Czytelnik znajdzie kilka innych takich zastosowań tego aksjomatu w dalszych dowodach. – Istnieje jeszcze jeden interesujący aspekt podanego wyżej twierdzenia. W jego sformułowaniu nie występuje znak negacji, można więc przypuszczać, że dałoby się je udowodnić używając tylko aksjomatów z pierwszej grupy. W tym przypadku dowód jest rzeczywiście możliwy i nie trudny. Pierwszy krok sprowadza się do podstawienia „ p ” za „ r ” w IB, resztę zaś pozostawiamy czytelnikowi.

Zajmiemy się teraz trzecią grupą aksjomatów. Najpierw, mając do dyspozycji implikację oraz jej odwrotność, skupimy się na udowodnieniu równoważności. Następnie zanalizujemy dwa przykłady, ilustrujące zastępowanie wyrażeń równoważnych. (Por. uwaga po D2.)

D11. (a) $p \leftrightarrow \sim \sim p$;
(b) $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)$.

Wskazówka. Wykorzystać Aksjomat IIIC. Ponadto do (a) wykorzystać dwa inne aksjomaty. Do (b) wykorzystać pewne twierdzenie i jego odwrotność, otrzymany z twierdzenia przez podstawienie.

D12. (a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)]$;
(b) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(\sim p \rightarrow r) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)]$.

Wskazówka. W (a) zacząć od Aksjomatów IIIB i IC i wykonać takie podstawienie, by zastosować sylogizm (a zatem znowu IC). W (b) wykorzystać Aksjomaty IIIA i IIC oraz sylogizm (zamiast IIIB). Kontynuować jak w (a).

Doszliśmy do ostatnich dwóch grup. Odpowiednie twierdzenia będą analogiczne, damy więc wskazówki tylko do udowodnienia twierdzeń, w których występuje symbol „ $\vee$ ”.

D13. Udowodnić:

- (a) $(p \vee p) \rightarrow p$;
- (b) $(p \vee p) \leftrightarrow p$;
- (c) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$;
- (d) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$.

Wskazówka. W (a) wykorzystać Aksjomat IVC oraz D10. W (b) wyprowadzić odwrotność (a) podstawiając aksjomat, potem zaś wykorzystując Aksjomat IIIC. W (c) wykorzystać ponownie IVC, lecz z „ $q \vee p$ ” podstawionym za „ r ”. Następnie użyć IVA–C z podstawieniami. (d) dowodzić jak D11(b).

D14. Udowodnić:

- (a) $p \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$;
- (b) $q \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$;
- (c) $r \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$;
- (d) $(q \vee r) \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$;
- (e) $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$.

Wskazówka. W (a) wykorzystać Aksjomat IVA, następnie IVA z takim podstawieniem, aby otrzymać: $(p \vee q) \rightarrow [(p \vee q) \vee r]$. Po czym wykorzystać prawo sylogizmu. W (b) wyjść od Aksjomatu IVB i znaleźć podobną argumentację. Do udowodnienia (c) nie jest potrzebne prawo sylogizmu. W (d) wykorzystać (b), (c) oraz Aksjomat IVC. Do udowodnienia (e) wykorzystać (a) i (d).

Uwaga: Implikacja odwrotna do D14(e) da się udowodnić przez zastosowanie analogicznych kroków. Można też więc wykazać równoważność.

D15. Udowodnić:

- (a) $p \rightarrow (p \wedge p)$;
- (b) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$;
- (c) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$;

$$(d) \quad (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p).$$

D16. Udowodnić: $[p \wedge (q \wedge r)] \rightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$. Dowód przeprowadzić kolejnymi krokami, jak w D14.

Ostatnie trzy twierdzenia zależą od aksjomatów tylko pierwszej grupy.

D17. Udowodnić:

$$(a) \quad (q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)];$$

$$(b) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow [p \rightarrow (r \rightarrow q)];$$

$$(c) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow \{(q \rightarrow r) \rightarrow [(r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)]\}.$$

Wskazówka. Do udowodnienia (a) zastosować regułę podstawiania w IA tak, by zastosować sylogizm między otrzymanym wzorem a IB. W (b) zastosować regułę podstawiania w (a) i w IA, a następnie oderwać. W (c) najpierw wyprowadzić z IC przez podstawienie:

$$(1) \quad (p \rightarrow r) \rightarrow [(r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)].$$

Oznaczyć skrótowo wniosek przez „A”, a wówczas (10) będzie miało postać: „ $(p \rightarrow r) \rightarrow A$ ”. Wyprowadzić przez podstawienie w (a) i oderwanie:

$$(2) \quad [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)] \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow A].$$

Przywołać ponownie IC: wniosek IC zgadza się z hipotezą w (2). Zastosować więc znowu IC, by otrzymać:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow A].$$

Uwaga: czytelnik powinien zauważyć podobieństwo i różnicę między D17(a) a Aksjomatem IC.

Czytelnikowi, który chciałby ćwiczyć dalej udowadnianie twierdzeń rachunku zdań, proponujemy, co następuje: (i) Rozszerzyć D17(c) na pięć (lub więcej) zmiennych. (ii) Sformułować i udowodnić dalsze przykłady, które ilustrują zastępowanie wyrażeń równoważnych. Na przykład pewne wzory podobne do wzorów w D12 łatwo da się ustalić za pomocą wzorów w D17(a). (iii) Udowodnić inną odmianę prawa kontrapozycji (do udowodnienia np. „ $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ ” można się posłużyć techniką opartą na Aksjomacie IIA

i D17(a), przypominającą technikę proponowaną w związku z D9.)
(iv) Udowodnić niektóre z praw, zawierających obydwa symbole „ $\vee$ ” i „ $\wedge$ ”. (Por. ćwiczenie 14 w rozdziale II.) Łatwo da się udowodnić na przykład „ $\sim(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ ”, powołując się na Aksjomaty IVA–B, IIC oraz VC. Aby udowodnić:

$$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \rightarrow [p \wedge (q \vee r)],$$

trzeba najpierw pokazać, że każdy człon pierwszej alternatywy pociąga za sobą każdy człon ostatniej koniunkcji.

D18. Które z wymienianych tu aksjomatów i twierdzeń znane są już z rozdziału II? Przypomnieć ich nazwy. Do spisu tego dołączyć również prawa, które przypominają prawa z rozdziału II, ale różnią się od nich postacią lub – do pewnego stopnia – treścią.

D19. Wszystkie powyższe aksjomaty rachunku zdań są prawdziwe w sensie tabel prawdziwościowych (co czytelnik może łatwo sprawdzić). Z obserwacji tej można wyciągnąć wniosek, że wszystkie twierdzenia wyprowadzone z tych aksjomatów przez zastosowanie reguł podstawienia i odrywania, poddane sprawdzeniu metodą tabel prawdziwościowych, również okażą się prawdziwe.

Uwaga: Można też pokazać, że zachodzi sytuacja odwrotna, mianowicie że każde zdanie, które jest prawdziwe w sensie tabel prawdziwościowych, da się wyprowadzić z tych aksjomatów. Zatem obie te metody konstruowania rachunku zdań są równoważne. Zadanie to jednak jest o wiele trudniejsze.

Część druga

Zastosowanie logiki i metodologii
w budowaniu teorii matematycznych

VII

Konstrukcja teorii matematycznej: prawa uporządkowania liczb

§43 Terminy pierwotne konstruowanej teorii; aksjomaty, które dotyczą podstawowych relacji między liczbami

Rozporządzając już pewnym zasobem wiedzy z zakresu logiki i metodologii, przystąpimy obecnie do położenia podstaw konkretnej, zresztą bardzo prostej, teorii matematycznej. Da to nam doskonałą okazję do lepszego przyswojenia – a nawet pewnego poszerzenia – nabytej już wiedzy.

Teoria, którą będziemy się zajmowali, stanowi fragment arytmetyki liczb rzeczywistych. Zawiera ona podstawowe twierdzenia, rządzące dwiema zasadniczymi relacjami między liczbami, czyli relacją mniejszości i relacją większości, jak również dwoma podstawowymi działaniami na liczbach, dodawaniem i odejmowaniem. Teorię tę poprzedza wyłącznie logika; innymi słowy, logika jest jedyną nauką wcześniejszą.

* * *

W teorii tej przyjmujemy następujące terminy pierwotne:

*liczba rzeczywista,
jest mniejsze od,
jest większe od,
suma.*

Jak poprzednio, zamiast „*liczba rzeczywista*” będziemy mówić po prostu „*liczba*”. Za termin pierwotny właściwie wygodniej jest uważać nie słowo „*liczba*”, lecz wyrażenie „*zbiór wszystkich liczb*” i oznaczać go symbolem „**R**”. Tak więc, aby wyrazić, że x jest liczbą, napiszemy:

$$x \in \mathbf{R}.$$

Alternatywnie możemy postanowić, by w skład dziedziny naszej teorii wchodziły tylko liczby rzeczywiste, oraz by zmienne takie jak „ x ”, „ y ”, ... przybierały wartości ze zbioru liczb (lub by zastępowały nazwy liczb). Do formułowania zdań naszej teorii termin „*liczba rzeczywista*” będzie wówczas zupełnie zbyteczny, kiedy zaś zajdzie potrzeba użycia symbolu „**R**”, zastąpimy go przez „**V**” (por. § 23).

Wyrażenia „*jest mniejsze od*” i „*jest większe od*” traktujemy jak gdyby były pojedynczymi wyrazami; zastąpimy je odpowiednio zwykłe używanymi symbolami: „ $<$ ” i „ $>$ ”. Zamiast „*nie jest mniejsze od*” i „*nie jest większe od*” będziemy pisać „ $\nless$ ” i „ $\ngtr$ ” (por. § 28), a zamiast „*suma liczb (składników) x i y* ”, czy „*wynik dodawania x i y* ” używać będziemy zwykłego zapisu:

$$x + y.$$

Podsumowując, symbol „**R**” oznacza pewien zbiór, symbole „ $<$ ”, „ $>$ ” są znakami pewnych binarnych relacji, zaś „ $+$ ” – znakiem pewnego binarnego działania.

* * *

Wśród aksjomatów omawianej teorii dają się wyróżnić dwie grupy. Aksjomaty pierwszej grupy wyrażają podstawowe własności relacji mniejszości i większości, natomiast aksjomaty drugiej grupy dotyczą głównie dodawania. Na razie będziemy mieć do czynienia tylko z pierwszą grupą, w której skład wchodzi ogółem pięć zdań:

AKSJOMAT 1. *Dla dowolnych liczb x i y (czyli dla dowolnych elementów zbioru **R**) mamy: $x = y$ lub $x < y$ lub $x > y$.*

AKSJOMAT 2. *Jeśli $x < y$, to $y \nless x$.*

AKSJOMAT 3. *Jeśli $x > y$, to $y \ngtr x$.*

AKSJOMAT 4. *Jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.*

AKSJOMAT 5. *Jeśli $x > y$ i $y > z$, to $x > z$.*

Aksjomaty tu wypisane, podobnie jak dowolne twierdzenia arytmetyczne o charakterze ogólnym orzekające, że dowolne liczby $x, y, \dots$ mają taką a taką własność, powinny zaczynać się od słów „dla dowolnych liczb $x, y, \dots$ ” lub „dla dowolnych liczb $x, y, \dots$ ze zbioru $\mathbf{R}$ ” lub po prostu „dla dowolnych $x, y, \dots$ ” (jeśli umówimy się, że tutaj zmienne „ x ”, „ y ”, ... należą do zbioru liczb). Ale ponieważ chcemy stosować się do zwyczaju znanego nam z § 3, zwrot ten zwykle będziemy dodawać jedynie w myśli; dotyczy to nie tylko aksjomatów, lecz również twierdzeń i definicji, które napotkamy w dalszym ciągu naszych rozważań. I tak Aksjomat 2 w pełnej postaci można odczytać następująco:

Dla dowolnych x i y (lub, dla dowolnych elementów x i y ze zbioru $\mathbf{R}$), jeśli $x < y$, to $y \not< x$.

Aksjomat 1 będziemy nazywać PRAWEM TRYCHOTOMII W SŁABSZEJ POSTACI (prawo to istnieje również w mocniejszej postaci, z którą zapoznamy się później). Aksjomaty 2 – 5 wyrażają, że relacje mniejszości i większości są asymetryczne i przechodnie (por. § 29); w związku z tym nazywa się je PRAWAMI ASYMETRII i PRAWAMI PRZECHODNOŚCI dla relacji mniejszości i większości. A ogólniej, aksjomaty pierwszej grupy i wynikające z nich twierdzenia nazywamy PRAWAMI UPORZĄDKOWANIA LICZB.

* * *

Relacje arytmetyczne $<$ i $>$ razem z logiczną relacją identyczności $=$ będziemy tutaj nazywać PODSTAWOWYMI RELACJAMI MIĘDZY LICZBAMI.

§44 Prawa przeciwzwrotności dla podstawowych relacji; dowody nie wprost

Nasze następne zadanie polega na wyprowadzeniu z przyjętych aksjomatów szeregu twierdzeń. Nie kusząc się – zarówno tu, jak w następnym rozdziale – o systematyczny wykład, podamy tylko te twierdzenia, które posłużą do ilustracji pewnych pojęć i faktów z zakresu logiki i metodologii.

TWIERDZENIE 1. *Żadna liczba nie jest mniejsza od samej siebie:
 $x \not< x$ (dla każdego x).*

Dowód. Przypuśćmy, że nasze twierdzenie jest fałszywe. Istnieje więc liczba x , która spełnia wzór:

$$(1) \quad x < x.$$

Aksjomat 2 odnosi się do dowolnych liczb x i y (niekoniecznie różnych od siebie), zachowuje więc swą moc także wtedy, gdy za „ y ” podstawimy zmienną „ x ”, oznaczającą wprowadzoną wyżej liczbę x . Otrzymamy wówczas:

$$(2) \quad \text{jeśli } x < x, \text{ to } x \not< x.$$

Warunki (1) i (2) pociągają za sobą natychmiast, że

$$x \not< x;$$

wniosek ten jednak jest w jawnej sprzeczności ze wzorem (1). Musimy zatem odrzucić pierwotne przypuszczenie i uznać twierdzenie za udowodnione.[†]

Pokażemy teraz, jak przekształcić ten dowód w dowód zupełny, który dla przejrzystości wyrazimy za pomocą symboli logicznych (por. § 13 i 15). W tym celu powołamy się na tak zwane PRAWO REDUCTIO AD ABSURDUM z rachunku zdań¹:

$$(I) \quad (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p.$$

[†]Polecamy porównanie pierwszego (nieformalnego) dowodu z dowodem zupełnym, który podajemy niżej. Z jednej strony, w dowodzie zupełnym niedopuszczalne jest rozpoczęcie rozumowania od „Przypuśćmy, że nasze twierdzenie jest fałszywe...” Z drugiej strony, czytelnik przypuszczalnie zwrócił uwagę na pewien brak precyzji w pierwszym dowodzie, gdzie po to by spełnić konkretny warunek wprowadzono liczbę x , a następnie kontynuowano dyskusję, powołując się na dowolne liczby x i y i odpowiednie zmienne. Tej nieścisłości łatwo uniknęlibyśmy, wprowadzając, powiedzmy, liczbę u , która spełnia wspomniany warunek, i odpowiednio do tego przeprowadzili resztę dowodu. Wszelako komuś niedoświadczonemu takie postępowanie mogłoby się wydać niezrozumiałe. W drugim dowodzie omijamy te komplikacje; odwołujemy się tylko do zmiennych „ x ” i „ y ”, nie wspominając nic o liczbach. (Zauważmy, że w drugim dowodzie pominięto kwantyfikator; analogicznie postąpiono w *Ćwiczeniach dodatkowych* do rozdziału VI.)

¹Prawo to, wraz z prawem pokrewnym, opatrzonym tą samą nazwą:

$$(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p,$$

wykorzystywano w wielu zawilych, historycznie ważnych dowodach zarówno w logice, jak w matematyce. Włoski logik i matematyk G. VAILATI (1863–1909) poświęcił historii tego prawa specjalną monografię.

Dalej, posługujemy się Aksjomatem 2 zapisanym symbolicznie:

$$(II) \quad (x < y) \rightarrow \sim (y < x).$$

Dowód nasz opieramy wyłącznie na zdaniach (I) i (II). Najpierw do zdania (I) stosujemy regułę podstawiania, zastępując wszędzie „ p ” przez „ $(x < x)$ ”:

$$(III) \quad \{(x < x) \rightarrow \sim (x < x)\} \rightarrow \sim (x < x).$$

Następnie regułę podstawiania stosujemy do (II), zastępując „ y ” przez „ x ”:

$$(IV) \quad (x < x) \rightarrow \sim (x < x).$$

W końcu stwierdzamy, że zdanie (IV) jest założeniem zdania warunkowego (III), wobec czego możemy zastosować regułę odrywania, otrzymując:

$$(V) \quad \sim (x < x),$$

które to zdanie jest symboliczną postacią dowodzonego twierdzenia.

* * *

Dowód Twierdzenia 1 stanowi przykład tak zwanego DOWODU NIE WPROST, znanego również jako DOWÓD PRZEZ SPROWADZENIE DO NIEDORZECZNOŚCI. Dowody tego rodzaju dają się scharakteryzować ogólnie w sposób następujący: aby udowodnić twierdzenie, zakładamy, że jest ono fałszywe, a następnie wyprowadzamy pewne wnioski, które zmuszają nas do odrzucenia początkowego założenia. Dowody nie wprost są bardzo rozpowszechnione w matematyce. Nie wszystkie one przebiegają zgodnie ze wzorcem dowodu Twierdzenia 1; przeciwnie, w przedstawionym tu dowodzie mamy do czynienia ze stosunkowo rzadką postacią dowodów nie wprost. Bardziej typowe ich przykłady podamy później.

* * *

Przyjęty przez nas system aksjomatyczny jest całkowicie symetryczny względem symboli „ $<$ ” i „ $>$ ”. Dlatego też do każdego twierdzenia dla relacji mniejszości automatycznie otrzymujemy odpowiednie twierdzenie dla relacji większości, a ponieważ dowody są całkowicie analogiczne, to dowód drugiego twierdzenia można zupełnie pominąć. I tak, twierdzenie odpowiadające Twierdzeniu 1 brzmi:

Twierdzenie 2. *Żadna liczba nie jest większa od siebie samej:*

$$x \not> x.$$

Jak wiemy z logiki, relacja identyczności $=$ jest zwrotna, lecz Twierdzenia 1 i 2 pokazują, że pozostałe dwie podstawowe relacje między liczbami, $<$ i $>$, są przeciwzwrotne. Twierdzenia te zatem nazywamy PRAWAMI PRZECIWZWROTNOŚCI (dla relacji mniejszości i większości).

§45 Dalsze twierdzenia o podstawowych relacjach między liczbami

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. $x > y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y < x$.

Dowód. Musimy wykazać, że wzory:

$$x > y \text{ i } y < x$$

są równoważne, czyli że pierwszy pociąga za sobą drugi i na odwrót (por. § 10).

Przypuśćmy najpierw, że

$$(1) \quad y < x.$$

Zgodnie z Aksjomatem 1 zachodzi przynajmniej jeden z trzech przypadków:

$$(2) \quad x = y, \quad x < y \text{ lub } x > y.$$

Gdybyśmy mieli $x = y$, to na mocy prawa LEIBNIZA z teorii identyczności (lub, bardziej bezpośrednio, z reguły zastępowania zmiennych; por. § 17) moglibyśmy we wzorze (1) zastąpić „ x ” przez „ y ”. Otrzymalibyśmy wówczas wzór:

$$y < y,$$

który pozostaje w jawnej sprzeczności z Twierdzeniem 1. Mamy zatem:

$$(3) \quad x \neq y.$$

Ale mamy również:

$$(4) \quad x \not< y$$

ponieważ, na mocy Aksjomatu 2, nie mogą zachodzić jednocześnie wzory:

$$x < y \text{ i } y < x.$$

Wziąwszy pod uwagę (2), (3) i (4), dochodzimy do wniosku, że musi zachodzić tu trzeci przypadek, mianowicie:

$$(5) \quad x > y.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że wzór (1) pociąga za sobą (5); analogicznie można uzasadnić wynikanie odwrotne, czyli w przeciwnym kierunku. Zatem oba te wzory są rzeczywiście równoważne, *q. e. d.*²

Przywołując terminologię algebry relacji (por. § 28) powiemy, że – zgodnie z Twierdzeniem 3 – każda z relacji $<$ i $>$ jest konwersem drugiej.

Twierdzenie 4. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

Dowód. Ponieważ

$$x \neq y,$$

na mocy Aksjomatu 1 mamy:

$$x < y \text{ lub } x > y;$$

drugi człon tej alternatywy, na mocy Twierdzenia 3, jest równoważny zdaniu:

$$y < x.$$

Zatem mamy[†]:

$$x < y \text{ lub } y < x,$$

q. e. d.

W analogiczny sposób możemy udowodnić:

Twierdzenie 5. *Jeśli $x \neq y$, to $x > y$ lub $y > x$.*

²Litery „*q. e. d.*” są stosowanym powszechnie skrótem wyrażenia „*quod erat demonstrandum*”, czyli „co było do okazania” i oznaczają koniec dowodu.

[†]Ten nieformalny dowód ilustruje ważną REGULĘ ZASTĘPOWANIA RÓWNOWAŻNYCH FUNKCJI ZDANIOWYCH (oczywiście, łącznie ze zdaniami). Reguła ta, którą rozważaliśmy (nie wymieniając nazwy) w ćwiczeniu 16 w rozdziale II, stanowi w szczególności podstawę posługiwania się zdefiniowanymi terminami; patrz również: §§ 11 i 46.

Twierdzenia 4 i 5 wyrażają, że relacje $<$ i $>$ są spójne; twierdzenia te noszą nazwę PRAW SPÓJNOŚCI (dla relacji mniejszości i większości). Aksjomaty 2–5 wraz z Twierdzeniami 4 i 5 pokazują, że każda z dwóch relacji, $<$ lub $>$, porządkuje zbiór liczb $\mathbf{R}$.

Twierdzenie 6. *Dowolne liczby x i y spełniają jeden i tylko jeden z trzech wzorów: $x = y$, $x < y$ i $x > y$.*

Dowód. Z Aksjomatu 1 wynika, że przynajmniej jeden z danych wzorów musi być spełniony. Aby udowodnić, że wzory:

$$x = y \text{ i } x < y$$

wzajemnie się wykluczają, postępujemy, jak w dowodzie Twierdzenia 3: w drugim z nich „ x ” zastępujemy przez „ y ”, dochodząc w ten sposób do sprzeczności z Twierdzeniem 1. Podobnie można wykazać wykluczanie się wzorów:

$$x = y \text{ i } x > y.$$

Wreszcie, dwa wzory:

$$x < y \text{ i } x > y$$

nie mogą zachodzić jednocześnie, bo wówczas wzory (na mocy Twierdzenia 3):

$$x < y \text{ i } y < x,$$

pozostawałyby w sprzeczności z Aksjomatem 2. Zatem dowolne liczby x i y spełniają tylko jeden z trzech podanych wzorów, *q. e. d.*

Twierdzenie 6 nazwiemy PRAWEM TRYCHOTOMII W SILNIEJSZEJ POSTACI lub po prostu PRAWEM TRYCHOTOMII. Zgodnie z nim między dwiema danymi liczbami zachodzi jedna i tylko jedna podstawowa relacja. Używając wyrażenia „*albo ... albo ...*” (rozszerzonego na trzy człony) w znaczeniu wyłączającym, zaproponowanym w § 7, nadamy Twierdzeniu 6 bardziej zwięzłe sformułowanie:

Dla dowolnych liczb x i y : albo $x = y$, albo $x < y$, albo $x > y$.

§46 Inne relacje między liczbami

Obok relacji podstawowych ważną rolę w arytmetyce odgrywają trzy inne relacje. Jedną z nich jest znana nam już relacja różności $\neq$, obecnie zaś omówimy pozostałe dwie, $\leq$ i $\geq$.

Sens symbolu „ $\leq$ ” wyjaśnia następująca definicja:

DEFINICJA 1. *Mówimy, że $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $x < y$.*

Wzór:

$$x \leq y$$

odczytujemy: „ x jest mniejsze lub równe y ” lub „ x jest co najwyżej równe y ”.

* * *

Mimo że treść powyższej definicji robi wrażenie zupełnie jasnej, doświadczenie pokazuje, że stosowanie jej w praktyce prowadzi niekiedy do pewnych nieporozumień. Niektórzy ludzie, którym wydaje się, że doskonale rozumieją sens symbolu „ $\leq$ ”, kwestionują jednak zastosowanie go do konkretnych liczb. Mało, że odrzucają zdanie typu:

$$1 \leq 0$$

jako oczywiście fałszywe – w czym akurat mają rację – ale również uważają za pozbawione sensu lub zgoła fałszywe wzory:

$$0 \leq 0 \text{ lub } 0 \leq 1;$$

utrzymują oni bowiem, że nie ma sensu mówić, iż $0 \leq 0$ lub że $0 \leq 1$, skoro wiadomo, iż $0 = 0$ i $0 < 1$. Innymi słowy, nie da się wskazać nawet jednej pary liczb, która ich zdaniem spełniałaby wzór:

$$x \leq y.$$

Pogląd ten jest nader błędny. Właśnie z tego, że zachodzi „ $0 < 1$ ”, wynika, że zdanie:

$$0 = 1 \text{ lub } 0 < 1$$

jest prawdziwe, jako że alternatywa dwóch zdań jest zawsze prawdziwa, o ile prawdziwe jest jedno z tych zdań (por. § 7). Z kolei zgodnie z Definicją 1, alternatywa ta jest równoważna zdaniu:

$$0 \leq 1.$$

Z tych samych względów prawdziwy jest również wzór:

$$0 \leq 0.$$

Źródłem nieporozumień są przypuszczalnie pewne przyzwyczajenia wyniesione z życia codziennego (*na które zwracaliśmy już uwagę czytelnika przy końcu § 7*). W języku powszednim zwykło się uznawać alternatywę dwóch zdań, gdy wiemy, że jedno z nich jest prawdziwe, nie wiemy natomiast które. Nikt chyba nie powie, że $0 = 1$ lub $0 < 1$ (choć jest to niewątpliwie prawdą), gdy może wyrazić coś prostszego i równocześnie logicznie mocniejszego, mianowicie że $0 < 1$. Wszelako w rozważaniach matematycznych nie zawsze korzystnie jest wyrażać wszystko, co wiemy, w możliwie najmocniejszej formie. Na przykład o czworoboku czasami powiemy, że jest równoległobokiem, chociaż wiemy o nim więcej, powiedzmy, że jest kwadratem; postępujemy tak po to, by zastosować twierdzenie ogólne, odnoszące się do dowolnego równoległoboku. Z podobnych względów, wiedząc, że pewna liczba x jest mniejsza od 1 (na przykład dotyczy to 0), stwierdzimy tylko, że $x \leq 1$, innymi słowy, że albo $x = 1$, albo $x < 1$.

* * *

Podamy teraz dwa twierdzenia odnośnie relacji $\leq$.

Twierdzenie 7. $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \nprec y$.

Dowód. Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem prawa trychotomii (Twierdzenie 6). W istocie, jeśli

$$(1) \quad x \leq y$$

to zgodnie z Definicją 1, brzmiącą:

$$(2) \quad x = y \text{ lub } x < y,$$

nie może zachodzić wzór:

$$x > y.$$

I odwrotnie. Jeśli

$$(3) \quad x \not\leq y,$$

to musi być spełniony jeden z warunków (2) i – ponownie na mocy Definicji 1 – będzie zachodził wzór (1). Wzory (1) i (3) są więc równoważne, *q.e.d.*

Zgodnie z terminologią w § 28 Twierdzenie 7 mówi, że relacja $\leq$ jest negacją relacji $>$.

Ze względu na strukturę Twierdzenia 7 można by je przyjąć za definicję symbolu „ $\leq$ ” – inną niż definicja podana wcześniej, ale jej równoważną. Twierdzenie to również ostatecznie rozwiewa wszelkie wątpliwości związane ze stosowaniem symbolu „ $\leq$ ”. Nikt bowiem nie zawahałby się przed uznaniem wzorów:

$$0 \leq 0 \quad \text{ i } \quad 0 \leq 1$$

za prawdziwe, uświadomiwszy sobie, że są one równoważne[†] odpowiednim wzorom:

$$0 \not\leq 0 \quad \text{ i } \quad 0 \not\leq 1.$$

Gdybyśmy zechcieli, moglibyśmy obyć się bez symbolu „ $\leq$ ”, stosując zamiast niego „ $\not\leq$ ”.

TWIERDZENIE 8. $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq y$ i $x \neq y$.

Dowód. Jeśli

$$(1) \quad x < y,$$

to, na mocy Definicji 1, zachodzi:

$$(2) \quad x \leq y,$$

[†]Zwracamy uwagę czytelnika na to, że słowa „równoważny” używamy tu w innym znaczeniu, niż w rachunku zdań (por. § 10). Chodzi nie tyle o to, że dwa wzory, czy, powiedzmy, dwie definicje mają tę samą wartość logiczną, lecz że mają (prawie) ten sam sens i zakres. Mamy tu na myśli coś takiego: dwa wzory (lub metody, etc.) posiadają mniej więcej tę samą treść, wobec czego można stosować je zamiennie do różnych celów. Nie staramy się wyjaśnić, co znaczą tu słowa „treść” i „różne cele”, bo byłoby nader trudno uczynić to w sposób ogólny. Dlatego należy uważać, że takie użycie słowa „równoważny” jak w tekście ma przede wszystkim wartość heurystyczną. (W różnych szczególnych przypadkach można jednak jego użycie sprecyzować.) – Zob. kolejne przykłady w § 22 i przy końcu *Ćwiczeń dodatkowych* w rozdziale VI.

natomiast nie zachodzi, na mocy prawa trychotomii, wzór:

$$x = y.$$

Odwrotnie, jeśli zachodzi (2), to z Definicji 1 otrzymujemy:

$$(3) \quad x < y \text{ lub } x = y;$$

lecz jeśli równocześnie mamy:

$$x \neq y,$$

to musimy uznać pierwszą część alternatywy (3), czyli wzór (1). Tak więc implikacja zachodzi w obu kierunkach, *q. e. d.*

Pominiemy tutaj szereg innych własności relacji $\leq$. W szczególności mamy tu na myśli twierdzenia o zwrotności i przechodniości tej relacji. Dowody tych twierdzeń nie przedstawiają żadnych trudności.

* * *

Definicja symbolu „ $\geq$ ” jest zupełnie analogiczna do Definicji 1; z twierdzeń dotyczących relacji $\leq$ automatycznie otrzymujemy odpowiednie twierdzenia dla relacji $\geq$, zastępując wszędzie symbole „ $\leq$ ”, „ $<$ ” symbolami „ $\geq$ ”, „ $>$ ” oraz „ $<$ ”.

* * *

Wzory typu:

$$x = y,$$

w których zamiast „ x ” i „ y ” mogą występować stałe, zmienne oraz całe wyrażenia oznaczające liczby, nazywamy zwykle RÓWNANIAMi. Podobne wzory postaci:

$$x < y \text{ lub } x > y$$

nazywają się NIERÓWNOŚCIAMI (W WĘŻSZYM ZNACZENIU). Pośród NIERÓWNOŚCI W SZERSZYM ZNACZENIU mamy dodatkowo wzory postaci:

$$x \neq y, \quad x \leq y, \text{ lub } x \geq y.$$

O wyrażeniach występujących po lewej i po prawej stronie symboli „=”, „<” itd. w takim wzorze mówimy, że są LEWĄ i PRAWĄ STRONĄ RÓWNAŃ lub NIERÓWNOŚCI.

Ćwiczenia

1. Rozważmy dwie relacje między ludźmi: relację bycia osobą niższą wzrostem i relację bycia osobą wyższą wzrostem. Jaki warunek powinien spełniać dowolny zbiór ludzi, aby wraz z tymi dwiema relacjami utworzył model aksjomatów pierwszej grupy (por. § 37)?

2. Niech wzór:

$$x \otimes y$$

oznacza, że liczby x i y spełniają jeden z następujących warunków:

(i) liczba x ma mniejszą wartość bezwzględną od liczby y , lub (ii) jeśli wartości bezwzględne liczb x i y są takie same, to x jest ujemne, y zaś – dodatnie.[†] Ponadto, niech wzór:

$$x \oslash y$$

ma takie samo znaczenie jak:

$$y \otimes x.$$

W oparciu o znane prawa arytmetyki pokazać, że zbiór wszystkich liczb i zdefiniowanych wyżej relacji $\otimes$ i $\oslash$ ustanawia model pierwszej grupy aksjomatów.

Podać inne przykłady modeli (lub interpretacji) tych aksjomatów w obrębie arytmetyki i geometrii.

3. Z Twierdzenia 1 wyprowadzić następujące twierdzenie:

$$\text{jeśli } x < y, \text{ to } x \neq y.$$

I odwrotnie. Wyprowadzić Twierdzenie 1 z podanego twierdzenia, nie odwołując się do żadnych innych praw arytmetyki. Czy oba te dowody są dowodami nie wprost i czy pasują one do wzorca dowodu Twierdzenia 1 z § 44?

4. Uogólnić dowód Twierdzenia 1 z § 44 i w ten sposób ustalić następujące prawo ogólne teorii relacji (por. uwagi w § 37):

[†]Przypominamy: Wartością bezwzględną liczby 0 jest 0, jeśli zaś $x \neq 0$, to obojętne, czy mamy x , czy $-x$, wartość bezwzględna jest zawsze liczbą dodatnią. Na przykład wartość bezwzględna liczb -2 i 2 jest 2 .

Każda relacja R , asymetryczna w danej klasie K , jest również przeciwzrotna w tej klasie.

5. Pokaż, że jeśli Twierdzenie 1 jest przyjęte jako nowy aksjomat, wtedy dawny Aksjomat 2 może być wyprowadzony jako konsekwencja tego aksjomatu i Aksjomatu 4.

Jako uogólnienie tego rozumowania udowodnij następujące ogólne prawo teorii relacji:

Każda relacja R , przeciwzrotna i przechodnia w danej klasie K , jest również asymetryczna w tej klasie.

***6.** Przy końcu § 44 próbowaliśmy wytłumaczyć, że dowód Twierdzenia 2 jest analogiczny ze względu na całkowitą symetryczność, wobec czego można go pominąć. Inne uzasadnienie pominięcia tego dowodu wynika z pewnych ogólnych rozważań w rozdziale VI. Przedstawić dokładnie to inne uzasadnienie, podając szczegółowo z jakich rozważań ono wynika.

7. Przetłumaczyć następujące twierdzenia na zwykły język, a także wyprowadzić je z pierwszej grupy aksjomatów:

$$(a) \forall_{x,y}\{x = y \leftrightarrow [\sim (x < y) \wedge \sim (y < x)]\};$$

$$(b) \forall_{x,y}[x < y \rightarrow \forall_z(x < z \vee z < y)].$$

8. Wyprowadzić następujące twierdzenia z Aksjomatu 4 i Definicji 1, a ponadto wyrazić je w symbolice logicznej:

$$(a) \text{ jeśli } x < y \text{ i } y \leq z, \text{ to } x < z;$$

$$(b) \text{ jeśli } x \leq y \text{ i } y < z, \text{ to } x < z;$$

$$(c) \text{ jeśli } x \leq y \text{ i } y < z, \text{ i } z \leq t, \text{ to } x < t.$$

9. Pokazać, że relacje $\leq$ i $\geq$ są zwrotne, przechodnie i spójne. Czy relacje te są symetryczne, czy asymetryczne?

10. Pokazać, że między dowolnymi dwiema liczbami zachodzą dokładnie trzy z sześciu relacji: $=$, $<$, $>$, $\neq$, $\leq$ oraz $\geq$.

11. Zarówno konwers jak negacja każdej z sześciu relacji wyszczególnionych w poprzednim ćwiczeniu jest znowu jedną z tych sześciu relacji. Uzasadnić to.

***12.** Między którymi relacjami podanymi w ćwiczeniu 10 zachodzi relacja inkluzji? Czym będzie suma, iloczyn i iloczyn względny dowolnej pary relacji?

Wskazówka. Przypomnieć sobie podane tu terminy; omówiliśmy je w § 28. Koniecznie rozważyć relację składającą się z dwóch równych relacji i pamiętać, że iloczyn względny może zależeć od kolejności czynników (por. ćwiczenie 4 w rozdziale V). Łącznie powinno się przeanalizować 36 par relacji.

VIII

Konstrukcja teorii matematycznej: prawa dodawania i odejmowania

§47 Aksjomaty dotyczące dodawania; ogólne własności działań, pojęcie grupy i grupy abelowej

Zajmiemy się teraz drugą grupą aksjomatów, w której skład wchodzi sześć następujących zdań[†]:

AKSJOMAT 6. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $z = x + y$; innymi słowy: jeśli $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$, to istnieje takie z , że $z \in \mathbf{R}$ i $z = x + y$.*

AKSJOMAT 7. $x + y = y + x$.

AKSJOMAT 8. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AKSJOMAT 9. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 10. *Jeśli $y < z$, to $x + y < x + z$.*

AKSJOMAT 11. *Jeśli $y > z$, to $x + y > x + z$.*

Skupmy się narazie na pierwszych czterech zdaniach tej grupy, czyli aksjomatach 6-9. Przypisują one dodawaniu szereg prostych

[†]Szósty aksjomat da się sformułować zwięźle, mianowicie: *jeśli $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$, to $x + y \in \mathbf{R}$* . Taka postać jest wygodna w użyciu.

własności, częstokroć wspominanych w kontekście innych działań z różnych działów logiki i matematyki.

Dla oznaczenia owych własności wprowadzono specjalne terminy. I tak, mówimy, że działanie D jest WYKONALNE W KLASIE K , lub że klasa K jest DOMKNIĘTA ZE WZGLĘDU NA DZIAŁANIE D , jeśli w wyniku wykonania działania D na dowolnych dwóch elementach klasy K otrzymujemy znowu element tej klasy; innymi słowy, gdy dla dowolnych dwóch elementów x i y klasy K , istnieje taki element z klasy K , że

$$z = xDy.$$

Działanie D jest PRZEMIENNE W KLASIE K , jeśli jego wynik nie zależy od porządku elementów klasy K , na których działanie to wykonujemy, lub – mówiąc zwięźlej – jeśli dla dowolnych elementów x i y tej klasy mamy:

$$xDy = yDx.$$

Działanie D jest ŁĄCZNE W KLASIE K , jeśli jego wynik nie zależy od sposobu łączenia elementów klasy w grupy, lub – ściślej – jeśli dla dowolnych trzech elementów x , y i z tej klasy spełniony jest warunek:

$$xD(yDz) = (xDy)Dz.$$

O działaniu D mówimy, że jest, odpowiednio, PRAWOSTRONNIE lub LEWOSTRONNIE ODWRACALNE W KLASIE K , jeśli dla dowolnych dwóch elementów x i y (klasy K), istnieje zawsze taki element z klasy K , że zachodzi:

$$x = yDz \quad \text{lub} \quad x = zDy.$$

Działanie D , które jest równocześnie prawo- i lewostronnie odwracalne, nazywamy działaniem OBUSTRONNIE ODWRACALNYM W KLASIE K . Widać stąd, że każde działanie przemienne, które jest prawo- lub lewostronnie odwracalne, musi być obustronnie odwracalne. Mówimy, że klasa K jest GRUPĄ ZE WZGLĘDU NA DZIAŁANIE D , jeśli działanie to jest wykonalne, łączne oraz odwracalne w K . Jeśli ponadto działanie D jest przemienne, to klasę K nazywamy GRUPĄ ABELOWĄ ZE WZGLĘDU NA DZIAŁANIE D . Grupy takie, łącznie ze specjalnym przypadkiem grup abelowych, stanowią przedmiot badań niezależnej

dyscypliny matematycznej zwanej TEORIA GRUP; o teorii grup wspominaliśmy już w rozdziale V.¹

W przypadku, gdy klasa K jest klasą pełną (lub dziedziną rozważanej teorii – por. § 23) terminy takie jak „*wykonalne*”, „*przemienne*” itd., zwykle stosujemy opuszczając słowa „*w klasie K*”.

Zgodnie z wprowadzoną wyżej terminologią, Aksjomaty 6-9 nazywamy kolejno PRAWEM WYKONALNOŚCI, PRZEMIENNOŚCI, ŁĄCZNOŚCI oraz PRAWOSTRONNEJ ODWRACALNOŚCI dla działania dodawania. Łącznie stwierdzają one, że zbiór wszystkich liczb jest grupą abelową ze względu na dodawanie.

§48 Prawa przemienności i łączności dla większej liczby składników

Aksjomat 7, inaczej prawo przemienności oraz Aksjomat 8, czyli prawo łączności w podanej wyżej postaci odnoszą się, odpowiednio, do dwóch i trzech składników.[†] Istnieje jednak nieskończenie wiele innych praw przemienności i łączności, dotyczących większej liczby składników. Na przykład wzór:

$$x + (y + z) = y + (z + x),$$

stanowi przykład prawa przemienności dla trzech składników, zaś wzór:

$$x + [y + (z + u)] = [(x + y) + z] + u$$

jest jednym z praw łączności dla czterech składników. Istnieją ponadto twierdzenia o charakterze mieszanym, które wyrażają – ogólnie rzecz biorąc – że dowolna zmiana w uporządkowaniu, bądź ugrupowaniu składników, nie wpływa na wynik dodawania. Dla ilustracji przytoczymy następujące twierdzenie.

¹Pojęcie grupy wprowadził do matematyki Francuz E. GALOIS (1811–1832). Termin „*grupa abelowa*” wybrano na cześć norweskiego matematyka N. H. ABELA (1802–1829), którego badania wywarły silny wpływ na rozwój algebry wyższej. Znaczenie pojęcia grupy dla matematyki zaczęto doceniać zwłaszcza po ukazaniu się prac innego norweskiego matematyka S. LIEGO (1842–1899) oraz niemieckiego matematyka F. KLEINA (1849–1925).

[†]Zauważmy, że Aksjomaty 7 i 8 zawierają też, odpowiednio, dwa i trzy różne symbole zmienne. Wszelako pojęcie składnika różni się w sposób zasadniczy od pojęcia zmiennej.

TWIERDZENIE 9. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Dowód. Dokonując odpowiednich podstawień, z Aksjomatów 7 i 8 otrzymamy:

$$(1) \quad z + y = y + z,$$

$$(2) \quad x + (z + y) = (x + z) + y.$$

Zgodnie z (1) i na mocy prawa LEIBNIZA możemy zastąpić „ $z + y$ ” w (2) przez „ $y + z$ ”, otrzymując w wyniku żądany wzór:

$$x + (y + z) = (x + z) + y.$$

W podobny sposób można wyprowadzić z Aksjomatów 7 i 8 – ewentualnie w oparciu o Aksjomat 6 – wszystkie prawa przemienności i łączności zawierające dowolną liczbę składników. Prawa te często wykorzystuje się praktycznie przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Przez przekształcenie wyrażenia oznaczającego liczbę rozumiemy tutaj, jak zwykle, zmianę, która prowadzi do wyrażenia, oznaczającego tę samą liczbę, a więc takiego, które da się połączyć znakiem identyczności z wyrażeniem pierwotnym. Najczęściej przekształceniom tego rodzaju poddaje się wyrażenia, zawierające zmienne, czyli wyrażenia, które są funkcjami nazwowymi. Innymi słowy, na mocy praw przemienności i łączności możemy przekształcić dowolne wyrażenie o postaci typu:

$$x + 2, \quad x + (y + z), \quad x + [(y + x) + (z + u)], \dots,$$

a więc wyrażenie, w którego skład wchodzi stałe liczbowe i zmienne oddzielone znakami dodawania i nawiasami. Przekształcanie ich polega na dowolnym przestawianiu symboli liczbowych i nawiasów (trzeba jednak uważać, by wskutek przestawiania nawiasów wyrażenie nie utraciło sensu).

§49 Prawa monotoniczności dla dodawania i ich odwrócenia

Aksjomaty 10 i 11, którymi się teraz zajmujemy, to tzw. PRAWA MONOTONICZNOŚCI dla dodawania względem relacji mniejszości i większości. Ogólnie powiadamy, że działanie binarne D jest MONOTONICZNE

W klasie K WZGLĘDEM RELACJI BINARNEJ R , jeśli dla dowolnych elementów x, y, z klasy K wzór:

$$yRz$$

pociąga za sobą:

$$(xDy)R(xDz);$$

przy czym drugi wzór oznacza, że wynik działania D wykonanego na przedmiotach x, y pozostaje w relacji R z wynikiem działania D wykonanego na x i z . (W przypadku działania nieprzemiennego powinno się odróżniać monotoniczność prawostronną od lewostronnej; własność przed chwilą zdefiniowana charakteryzuje monotoniczność prawostronną.)

Dodawanie jest działaniem monotonicznym nie tylko względem relacji mniejszości i większości – jak to wynika z Aksjomatów 10 i 11 – ale także względem innych relacji między liczbami, omawianych w § 46. Łatwy zwłaszcza jest dowód dla relacji identyczności:

TWIERDZENIE 10. *Jeśli $y = z$, to $x + y = x + z$.*

Dowód. Suma $x + y$, której istnienie zapewnia Aksjomat 6, jest równa sama sobie (na mocy Prawa II z § 17):

$$x + y = x + y.$$

Z uwagi na założenie twierdzenia wolno nam zastąpić zmienną „ y ” po prawej stronie tego równania zmienną „ z ”. Otrzymamy wówczas żądany wzór:

$$x + y = x + z.$$

Odwrócenie Twierdzenia 10 jest również prawdziwe:

TWIERDZENIE 11. *Jeśli $x + y = x + z$, to $y = z$.*

Naszkicujemy tu dwa dowody tego twierdzenia. Pierwszy, oparty na prawie trychotomii oraz Aksjomatach 6, 10 i 11, jest stosunkowo prosty. Jednakże do naszych dalszych celów potrzebny jest nam inny dowód, znacznie bardziej złożony, za to oparty wyłącznie na Aksjomatach 7-9.[†]

[†]Czytelnika może zdziwić, że nie zastosujemy Aksjomatu 6. Czy widząc w sformułowaniu aksjomatu lub twierdzenia „ $x + y$ ”, nie mamy prawa oczekiwać, że $x + y$ jest liczbą? Pytanie to nasuwa się zwłaszcza wtedy, gdy w grę wchodzi inne interpretacje terminów pierwotnych. W związku z tym przyjrzyjmy się możliwo-

Dowód pierwszy. Przypuśćmy, że rozważane twierdzenie jest fałszywe. Wobec tego istnieją takie liczby x , y i z , że

$$(1) \quad x + y = x + z$$

a mimo to

$$(2) \quad y \neq z.$$

Ponieważ $x + y$ i $x + z$ są liczbami (zgodnie z Aksjوماتem 6), to z prawa trychotomii wynika, że spełniają one tylko jeden ze wzorów:

$$x + y = x + z, \quad x + y < x + z, \quad \text{ i } \quad x + y > x + z.$$

Wobec (1) zachodzi pierwszy z nich, tym samym pozostałe odpadają. Zatem:

$$(3) \quad x + y \not< x + z \quad \text{ i } \quad x + y \not> x + z.$$

Z drugiej strony, jeśli ponownie zastosujemy prawo trychotomii, to z nierówności (2) wnosimy, że

$$y < z \quad \text{ lub } \quad y > z.$$

Stąd – na mocy Aksjomatów 10 i 11 – otrzymujemy alternatywę:

$$(4) \quad x + y < x + z \quad \text{ lub } \quad x + y > x + z,$$

która pozostaje w jawnej sprzeczności z (3).^{††} Musimy więc odrzucić pierwotne przypuszczenie i uznać twierdzenie za udowodnione.

ściom rozważanym w § 47. Jedna z nich – to klasa liczb $\mathbf{R}$, druga – ogólna (bliżej nieokreślona) klasa K . W przypadku klasy K – gdybyśmy nie przyjęli Aksjomatów 6 – Aksjomy 7 i 8 wymagałyby dodatkowego omówienia. – Dla czytelnika będzie z pożytkiem, jeśli skomentujemy krótko sytuację, gdy w grę wchodzi klasa K , która poza tym, że jest podklasą $\mathbf{R}$, pozostaje bliżej nieokreślona. Jeśli teraz $x \in K$ i $y \in K$, to $x + y$ będzie liczbą, która jednak wcale nie musi należeć do K . Mamy tu więc przypadek, że Aksjomat 6 nie stosuje się do K ; niemniej, wszystkie sumy zachowują dalej sens i Aksjomy 7 i 8 pozostają słuszne. – Wszelako teorie, w których Aksjomat 6 nie zachodzi, nie bardzo nas obchodzą. Jeśli bowiem przyjmujemy Aksjomat 9 wraz z Aksjomatami 7 i 8 (które teraz należy odpowiednio zinterpretować), jak w drugim dowodzie Twierdzenia 11, to Aksjomat 6 będziemy w stanie wyprowadzić; patrz § 55. Zatem wszystkie sumy w drugim dowodzie są dobrze zdefiniowane i rzeczywiście należą do założonej klasy.

^{††}Sprzeczność między (3) a (4) da się wyrazić wprost przez odwołanie się do jednego z praw DE MORGANA. Por. ćwiczenie 14 w rozdziale II. – Stwierdzenie (4) ma jeszcze jeden interesujący aspekt w związku z jego wyprowadzeniem ze zdania poprzedniego. Wychodzi się tutaj od alternatywy, której członami są założeniami słusznych implikacji i stwierdza się alternatywę odpowiednich założeń. Niektórym czytelnikom argument taki może się wydać nieprzekonujący. Jeden sposób

**Dowód drugi.*[‡] Zastosujmy Aksjomat 9 z „ x ” i „ z ” zastąpionymi odpowiednio przez „ y ” i „ u ”. Okazuje się, że istnieje liczba u , która spełnia wzór:

$$y = y + u.$$

Ale zgodnie z Aksjomatem 7:

$$y + u = u + y,$$

a na mocy prawa przechodności dla relacji identyczności (por. prawo IV z § 17):

$$(1) \quad y = u + y.$$

Zastosujmy teraz ponownie Aksjomat 9 z „ x ” i „ z ” zastąpionymi odpowiednio przez „ z ” i „ v ”. Otrzymamy liczbę v , spełniającą równanie:

$$(2) \quad z = y + v.$$

Z uwagi na (1) „ y ” możemy tu zastąpić wyrażeniem „ $u + y$ ”:

$$z = (u + y) + v.$$

potwierdzenia jego poprawności polega na zastosowaniu następującego prawa z rachunku zdań:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \{(r \rightarrow s) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]\}.$$

Istotnie, jeśli wyjdziemy od tego prawa i dokonamy odpowiednich podstawień i trzech oderwań, to omawiane wyprowadzenie uzyska postać dowodu zupełnego.

[‡]Na dowód drugi składa się szereg równań, które są elementarne (i liniowe) i wszystkie wyglądają dość podobnie. Samo przytoczenie ich nie oddaje więc struktury, czy też idei omawianego dowodu. Idei tej jednak nie wolno przeoczyć – musimy koniecznie ją rozumieć, by móc zrekonstruować dowód lub zastosować go w innej sytuacji. – To oczywiste, że na widok równania: „ $x + y = x + z$ ”, myślimy, by wstawić doń liczbę $-x$ i przekształcić równanie za pomocą dodawania. Aksjomaty nie mówią nam jednak nic na temat wielkości przeciwnych, musimy więc, że się tak wyrazimy, sami je wykoncypować. Najpierw bierzemy liczbę u ; liczba ta ma interpretację zera. Potem sięgamy po liczbę pomocniczą v , by pokazać, że u utrzymuje interpretację zera, będąc w kombinacji z wielkością inną niż y , w szczególności z z . Następnie wprowadzamy liczbę w , którą możemy uważać za $-x$, a która umożliwi nam zrealizowanie pierwotnego pomysłu. – Zauważmy również, że w drugim dowodzie Autor wołał zastosować Prawo IV i Prawo V z teorii identyczności, mimo że bardziej naturalne wydawałoby się zastosować wprost prawo LEIBNIZA (lub regułę zastępowania równych).

Na mocy prawa łączności, czyli Aksjomatu 8, mamy następnie:

$$u + (y + v) = (u + y) + v,$$

a zastosowawszy Prawo V z § 17 dochodzimy do:

$$z = u + (y + v).$$

Z uwagi na (2) „ $y + v$ ” możemy zastąpić przez „ z ” (na mocy prawa LEIBNIZA). Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$(3) \quad z = u + z.$$

Stosując Aksjomat 9 po raz trzeci, tym razem z „ x ”, „ y ” i „ z ” zastąpionymi odpowiednio przez „ u ”, „ x ” i „ w ”, otrzymujemy taką liczbę w , że

$$u = x + w,$$

a ponieważ

$$x + w = w + x,$$

to mamy:

$$(4) \quad u = w + x.$$

Z (4) i (1) otrzymujemy:

$$y = (w + x) + y;$$

ale na mocy prawa łączności:

$$w + (x + y) = (w + x) + y,$$

zaś ostatnie dwa równania prowadzą do:

$$(5) \quad y = w + (x + y).$$

Z uwagi na założenie twierdzenia, którego dowodzimy, „ $x + y$ ” w (5) wolno nam zastąpić przez „ $x + z$ ”, a to prowadzi nas do:

$$(6) \quad y = w + (x + z).$$

Stosując ponownie prawo łączności mamy:

$$w + (x + z) = (w + x) + z,$$

wobec czego (6) przekształca się w:

$$y = (w + x) + z.$$

Z uwagi na (4) „ $w + x$ ” wolno nam tu zastąpić przez „ u ”. W ten sposób otrzymujemy:

$$(7) \quad y = u + z.$$

Ale z równań (7) i (3) wynika, że

$$y = z,$$

*q. e. d.**

* * *

Wtrącimy tu kilka uwag odnośnie pierwszego dowodu Twierdzenia 11. Podobnie jak dowód Twierdzenia 1 stanowi on przykład dowodu nie wprost. Schemat^{‡‡} tego dowodu jest następujący. Otóż aby dowieść pewnego zdania, powiedzmy „ p ”, zakładamy, że zdanie to jest fałszywe, czyli przyjmujemy zdanie „*nie* p ”. Z założenia tego wyprowadzamy wniosek „ q ”; innymi słowy, uzasadniamy implikację:

jeśli nie p , to q

(w danym przypadku wnioskiem „ q ” jest koniunkcja warunków (3) i (4) występujących w dowodzie). Z drugiej strony, odwołując się do pewnych ogólnych praw logiki (jak w tym przypadku) lub pewnych twierdzeń wcześniej udowodnionych w teorii matematycznej, na gruncie której przeprowadzamy tu wszystkie dowody, potrafimy pokazać, że otrzymany wniosek jest fałszywy, innymi słowy, że zachodzi „*nie* q ”. To nas zmusza do odrzucenia pierwotnego założenia, a tym samym – do uznania zdania „ p ” za prawdziwe. Gdybyśmy naszemu rozumowaniu nadali postać dowodu zupełnego, istotną rolę odegrałoby w nim prawo logiczne, będące wariantem znanego nam z § 14 prawa kontrapozycji. Prawo to brzmi:

Z tego, że jeśli nie p , to q , wynika, że jeśli nie q , to p .

Rozważany schemat dowodzenia nieco się różni od zastosowanego do Twierdzenia 1. W tamtym dowodzie założywszy próbnie, że twierdzenie jest fałszywe, dowiedliśmy, że jest ono prawdziwe, czyli wyprowadziliśmy wniosek, który wprost przeczył naszemu założeniu;

^{‡‡}Dowód matematyczny często przeprowadza się zgodnie z pewną znaną linią rozumowania; tutaj słowo „*schemat*” odnosi się do takiej właśnie linii rozumowania. W poprzednim rozdziale używano w tym kontekście bardziej powszechnego słowa „*wzorzec*”.

tutaj z analogicznego założenia wyprowadziliśmy wniosek, o którym z innych źródeł wiedzieliśmy, że jest fałszywy. Różnica ta nie jest jednak istotna; za pomocą praw logicznych możemy łatwo pokazać, że dowód Twierdzenia 1 – podobnie jak każdy inny dowód nie wprost – da się dopasować do schematu, który właśnie naszkicowaliśmy.

* * *

Inne prawa monotoniczności, czyli aksjomaty 10 i 11, też można odwrócić:

TWIERDZENIE 12. *Jeśli $x + y < x + z$, to $y < z$.*

TWIERDZENIE 13. *Jeśli $x + y > x + z$, to $y > z$.*

Dowody tych twierdzeń możemy łatwo otrzymać wzorując się na pierwszym dowodzie Twierdzenia 11.

§50 Zamknięte systemy zdań

Istnieje prawo ogólne, którego znajomość znacznie upraszcza dowody ostatnich trzech twierdzeń (11, 12 i 13). Prawo to, nazywane czasem PRAWEM SYSTEMÓW ZAMKNIĘTYCH lub PRAWEM HAUBERA,² w pewnych sytuacjach pozwala udowodnić, że twierdzenia odwrotne są też prawdziwe, o ile udało nam się dowieść kilku zdań warunkowych.

Weźmy pod uwagę kilka implikacji, powiedzmy trzy, którym nadamy następującą schematyczną postać:

jeśli p_1 , to q_1 ;

jeśli p_2 , to q_2 ;

jeśli p_3 , to q_3 .

Te trzy zdania tworzą, jak mówimy, SYSTEM ZAMKNIĘTY, gdy ich poprzedniki wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, a więc gdy prawdą jest, że

$$p_1 \text{ lub } p_2 \text{ lub } p_3,$$

i gdy równocześnie tezy tych zdań wzajemnie się wykluczają:

$$\text{jeśli } q_1, \text{ to nie } q_2; \text{ jeśli } q_1, \text{ to nie } q_3; \text{ jeśli } q_2, \text{ to nie } q_3.$$

²Od nazwiska niemieckiego matematyka K. F. HAUBERA (1775–1851).

Prawo systemów zamkniętych głosi, że jeśli kilka zdań warunkowych jest prawdziwych i tworzą one system zamknięty, to odpowiednie zdania odwrotne są również prawdziwe.[†]

Najprostszy przykład systemu zamkniętego stanowi układ dwóch zdań, z których jedno jest implikacją:

$$\text{jeśli } p, \text{ to } q,$$

drugie zaś – zdaniem przeciwnym:

$$\text{jeśli nie } p, \text{ to nie } q.$$

Aby w tym przypadku uzasadnić oba twierdzenia odwrotne, nie trzeba wcale odwoływać się do prawa systemów zamkniętych; wystarczy zastosować prawa kontrapozycji.

Twierdzenie 10 wraz z Aksjomatami 10 i 11 tworzą system zamknięty trzech zdań. Wynika to z prawa trychotomii, bowiem skoro między dowolnymi dwiema liczbami zachodzi dokładnie jedna spośród relacji $=$, $<$ i $>$, to założenia tych trzech zdań, czyli

$$y = z, \quad y < z, \quad y > z,$$

wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, podczas gdy ich tezy:

$$x + y = x + z, \quad x + y < x + z, \quad x + y > x + z,$$

wykluczają się wzajemnie. (Z prawa trychotomii wynika jeszcze inny fakt, który obecnie nie posiada dla nas istotnego znaczenia, mianowicie, że trzy pierwsze wzory nie tylko wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, ale również wyczerpują się na wzajem, zaś trzy ostatnie wzory nie tylko wykluczają się wzajemnie, lecz również wykluczają wszystkie możliwe przypadki.) Już tylko dlatego, że te trzy zdania tworzą system zamknięty, twierdzenia odwrotne 11–13 muszą być spełnione.

Liczne systemy zamknięte spotykamy w geometrii elementarnej; na przykład przy rozważaniu wzajemnego położenia dwóch okręgów o równych promieniach możemy mieć do czynienia z systemem zamkniętym czterech zdań.

Na zakończenie powiemy, że jeśli ktoś nie chce odwoływać się do prawa systemów zamkniętych, pragnie jednak udowodnić zdania odwrotne do zdań tworzących system tego rodzaju, to może po prostu zastosować tę samą metodę przeprowadzenia dowodu, którą posłużyliśmy się w dowodzie pierwszym Twierdzenia 11.

[†]Czytelnik powinien zauważyć, iż prawo systemów zamkniętych jest prawem metodologicznym i nie należy ono do zakresu logiki właściwej.

§51 Kilka wniosków z praw monotoniczności

Twierdzenia 10 i 11 dają się połączyć w jedno zdanie:

$$y = z \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x + y = x + z.$$

Podobnie można połączyć Aksjomaty 10 i 11 z Twierdzeniami 12 i 13. Otrzymane tak twierdzenia nazwiemy PRAWAMI PRZEKSZTAŁCANIA RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI W RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI RÓWNOWAŻNE za pomocą dodawania. Twierdzenia te bywają streszczane następująco. Jeśli do obu stron równania lub nierówności dodamy tę samą liczbę, nie zmieniając znaku równania lub nierówności, to otrzymamy równanie lub nierówność równoważne wyjściowemu równaniu lub nierówności (oczywiście sformułowanie to nie jest całkiem poprawne, ponieważ po obu stronach równania lub nierówności stoją nie liczby lecz wyrażenia, do których nie da się dodać liczb). Omawiane twierdzenia odgrywają zasadniczą rolę przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

* * *

Wyprowadzimy teraz jeszcze jeden wniosek z praw monotoniczności – wniosek, który będzie potrzebny później:

TWIERDZENIE 14. *Jeśli $x + z < y + t$, to $x < y$ lub $z < t$.*

Dowód. Przypuśćmy, że teza twierdzenia jest fałszywa; innymi słowy, ani x nie jest mniejsze od y , ani z nie jest mniejsze od t . Na mocy prawa trychotomii wynika stąd, że musi być spełniony jeden z dwóch wzorów:

$$x = y \text{ lub } x > y$$

a także jeden z następujących dwóch wzorów:

$$z = t \text{ lub } z > t.$$

Trzeba więc rozważyć cztery możliwości:

$$(1) \ x = y \text{ i } z = t,$$

$$(2) \ x = y \text{ i } z > t,$$

$$(3) \ x > y \text{ i } z = t,$$

$$(4) \ x > y \text{ i } z > t.$$

Zacznijmy od pierwszej. Jeśli oba równania w (1) są słuszne, to na mocy Twierdzenia 10 z pierwszego równania otrzymamy:

$$z + x = z + y,$$

a ponieważ zgodnie z Aksjomatem 7:

$$x + z = z + x \text{ i } z + y = y + z,$$

to przez dwukrotne zastosowanie prawa przechodniości dla relacji identyczności otrzymamy:

$$(5) \quad x + z = y + z.$$

Jeśli teraz do drugiego równania w (1) zastosujemy Twierdzenie 10, to otrzymamy:

$$(6) \quad y + z = y + t,$$

które wraz z (5) daje:

$$(7) \quad x + z = y + t.$$

Przeprowadziwszy zupełnie analogiczny dowód – wykorzystujący dodatkowo Aksjomaty 5, 6 i 11 – w każdym z pozostałych trzech przypadków, czyli (2), (3) i (4) dojdziemy do nierówności:

$$(8) \quad x + z > y + t.$$

Jeden ze wzorów, (7) lub (8), musi być więc spełniony. Ponieważ jednak $x + z$ i $y + t$ są liczbami (Aksjomat 6), to z prawa trychotomii wynika, że wzór:

$$x + z < y + t$$

nie może być spełniony.[†]

W ten sposób, przypuszczając, że teza jest fałszywa, doszliśmy do jawnej sprzeczności z założeniem twierdzenia. Przypuszczenie to więc odrzucamy i widzimy, że teza istotnie wynika z założenia.

[†]Dowód ten, podobnie jak pierwszy dowód Twierdzenia 11, opiera się na prawach monotoniczności i trychotomii. Jeśli przyjrzymy się dokładnie kolejnym jego krokom, zobaczymy, jak współgrają ze sobą rozmaite prawa rachunku zdań, szczególnie te, które dotyczą symbolu „ $\vee$ ” (i, rzecz jasna, „ $\rightarrow$ ”). Przeanalizowanie niektórych z tych kroków i przedstawienie ich jako fragmentów dowodu pełnego uważamy za rzecz pouczającą. Stworzy to nam przede wszystkim możliwość ponownego przyjrzenia się pewnym prawom (por. również przykład w ods. „ $\dagger$ ” na str. 187). – Pomińmy występujące w twierdzeniach kwantyfikatory i oznaczmy skrótowo założenie przez „ Z ”, tezę przez „ T ”, zaś zdania (1)–(4) odpowiednio przez „ A ”, „ B ”, „ C ”, „ D ”. Dowód nie wprost przeprowadzimy biorąc pod uwagę

* * *

Przeprowadzony wyżej dowód uważa się za dowód nie wprost; po nieznaczących modyfikacjach dałoby się go dopasować do schematu, naszkicowanego w § 49 w związku z pierwszym dowodem Twierdzenia 11. Ale formalnie rzecz biorąc, przedstawiona tu droga rozumowania różni się nieco od sposobu dowodzenia Twierdzeń 1 i 11. Dowód ten przebiega następująco. Otóż aby udowodnić zdanie o postaci implikacji, przedstawionej schematycznie:

jeśli p , to q ,

przypuszczamy, że fałszywa jest teza tego zdania, czyli „ q ” (a nie całe zdanie), po czym wychodząc z tego przypuszczenia – z „*nie q* ” – dowodzimy, że założenie jest fałszywe, lub że zachodzi „*nie p* ”. Innymi słowy, zamiast dowodu danego zdania, przeprowadzamy dowód odpowiedniego zdania przeciwnego:

jeśli nie q , to nie p ,

„ $\sim T$ ”, a istotnym stwierdzeniem wstępnym będzie:

$$\sim T \rightarrow [(A \vee B) \vee (C \vee D)]$$

(przy czym członów alternatywy można pogrupować inaczej). Dowód tego stwierdzenia oprze się przede wszystkim na prawie trychotomii, ale również na prawach DE MORGANA i prawie rozdzielności (por. ćwiczenie 14 z rozdziału II); czytelnikowi pozostawiamy szczegółowe przeprowadzenie tego dowodu. – Następnie oznaczmy skrótowo zdania w (7) i (8) przez „ E ” i „ F ”. Argumenty podane (czy wskazane) w tekście, wynikające z praw monotoniczności, w gruncie rzeczy pokazują, że

$$A \rightarrow E, \quad B \rightarrow F, \quad C \rightarrow F, \quad D \rightarrow F.$$

Z prawa dodawania logicznego (mamy tu na myśli jego postać z § 12 i jej oczywisty wariant), prawa sylogizmu hipotetycznego, por. Aksjomaty IV_{A–B}, a także IC z *Ćwiczeń dodatkowych* do rozdziału VI, wyprowadzamy:

$$A \rightarrow (E \vee F), \dots, D \rightarrow (E \vee F).$$

Następnie, po trzykrotnym zastosowaniu prawa podanego jako Aksjomat IV_C, por. tamże, otrzymujemy:

$$[(A \vee B) \vee (C \vee D)] \rightarrow (E \vee F).$$

Z tej implikacji i stwierdzenia wstępnego, na mocy sylogizmu mamy: $\sim T \rightarrow (E \vee F)$. Po czym możemy łatwo wydedukować, wykorzystując trychotomię, że $\sim T \rightarrow \sim Z$. W tym miejscu odsyłamy czytelnika do rozważań w tekście.

a z jego słuszności wnosimy o słuszności zdania pierwotnego. To ostatnie wnioskowanie przeprowadza się w oparciu o pewien wariant prawa kontrapozycji, który wyraża, że prawdziwość zdania przeciwnego pociąga za sobą prawdziwość zdania pierwotnego (por. § 14).

Taki sposób dowodzenia bardzo się rozpowszechnił we wszystkich dyscyplinach matematycznych; stanowi on najpospolitszy typ dowodu nie wprost.

§52 Definicja odejmowania; działania odwrotne

Pokażemy teraz, jak można wprowadzić do naszych rozważań pojęcie odejmowania. W tym celu udowodnimy najpierw następujące twierdzenie:

Twierdzenie 15. *Dla dowolnych dwóch liczb y i z istnieje dokładnie jedna taka liczba x , że $y = z + x$.*

Dowód. W przypadku dowolnych liczb y i z Aksjomat 9 zapewnia istnienie co najmniej jednej liczby x spełniającej wzór:

$$y = z + x.$$

Musimy pokazać, że nie istnieje więcej niż jedna taka liczba, innymi słowy, że dowolne dwie liczby u i v , spełniające ten wzór, są identyczne. Wobec tego przypuśćmy, że

$$y = z + u \quad \text{ i } \quad y = z + v.$$

Stąd natychmiast wynika (na mocy praw symetrii i przechodniości dla relacji $=$), że

$$z + u = z + v,$$

z czego w oparciu o Twierdzenie 11 otrzymujemy:

$$u = v.$$

Tak więc istnieje dokładnie jedna liczba x (por. § 20), dla której

$$y = z + x,$$

q. e. d.

Tę jedyną liczbę x , określoną powyższym twierdzeniem, oznaczamy symbolicznie:

$$y - z;$$

zapis ten zaś odczytujemy po prostu „różnica liczb y i z ”, lub lepiej „wynik odejmowania liczby z od liczby y ”. Dokładna definicja pojęcia różnicy brzmi następująco:

DEFINICJA 2. *Mówimy, że $x = y - z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = z + x$.*

Ogólniej, działanie O nazywamy PRAWOSTRONNYM ODWRÓCENIEM DZIAŁANIA D W KLASIE K , o ile oba działania, D i O , spełniają następujący warunek:

dla dowolnych elementów x, y i z klasy K mamy:
 $x = yOz$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $y = zDx$.

Podobnie definiujemy analogiczne pojęcie LEWOSTRONNEGO ODWRÓCENIA DZIAŁANIA D . Jeśli działanie D jest przemienne w klasie K , to oba jego odwrócenia – prawe i lewe – pokrywają się i wtedy mówimy po prostu o ODWRÓCENIU DZIAŁANIA D (czy też o DZIAŁANIU ODWROTNYM DO D). Zgodnie z tą terminologią Definicja 2 wyraża fakt, że odejmowanie jest prawym odwróceniem (lub po prostu odwróceniem) dodawania.

§53 Definicje, których definiendum zawiera znak identyczności

*Definicja 2 stanowi przykład pewnego typu definicji często spotykanych w matematyce. Taka definicja mówi, jak należy rozumieć symbol, oznaczający albo pojedynczy przedmiot albo działanie na pewnej liczbie przedmiotów (które, jak pamiętamy, jest tym samym, co funkcja o pewnej liczbie argumentów). W każdej definicji tego typu definiendum ma postać równania:

$$x = \dots;$$

po prawej stronie znajduje się symbol, który definiujemy, względnie funkcja nazwowa, utworzona z tego symbolu i pewnych zmiennych „ y ”, „ z ”, ..., – zależnie od tego, czy symbol ten oznacza pojedynczy

przedmiot, czy działanie na przedmiotach. Definiens może być funkcją zdaniową o dowolnej postaci, która zawiera te same zmienne wolne, co definiendum, stwierdzając, że przedmiot x – ewentualnie razem z przedmiotami $y, z, \dots$ – spełnia taki a taki warunek. – Definicja 2 ustala sens symbolu, oznaczającego działanie na dwóch liczbach. Jako inny przykład podamy tu definicję symbolu „0”, który oznacza pojedynczą liczbę:

Mówimy, że $x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby y zachodzi wzór: $y + x = y$.

* * *

Z definicjami tego typu wiąże się pewne niebezpieczeństwo; jeśli konstruując je nie zachowamy dostatecznej ostrożności, możemy paść w sprzeczność. Wyjaśni to konkretny przykład.

Pozostawmy na chwilę nasze rozważania i przyjmijmy, że w arytmetyce dysponujemy już symbolem mnożenia i zamierzamy go wykorzystać do zdefiniowania symbolu dzielenia. Weźmiemy więc pod uwagę następującą prowizoryczną definicję, która ma dokładnie tę samą postać, co Definicja 2:

mówimy, że $x = y : z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = z \cdot x$.

Jeśli zastąpimy w tej definicji zarówno „ y ”, jak „ z ” przez „0”, zaś „ x ” najpierw przez „1”, potem przez „2” i zauważymy, że następujące wzory są prawdziwe:

$$0 = 0 \cdot 1 \quad \text{ i } \quad 0 = 0 \cdot 2,$$

to natychmiast otrzymamy:

$$1 = 0 : 0 \quad \text{ i } \quad 2 = 0 : 0.$$

Ale ponieważ dwa przedmioty, równe temu samemu przedmiotowi, są sobie równe, dochodzimy do tego, że

$$1 = 2,$$

czyli do absurdu.

Nie trudno znaleźć przyczynę tego zjawiska. Zarówno w Definicji 2, jak w prowizorycznej definicji ilorazu, definiens ma postać funkcji zdaniowej z trzema zmiennymi wolnymi „ x ”, „ y ” i „ z ”. Każdej takiej funkcji zdaniowej odpowiada relacja trójczłonowa, zachodząca

między liczbami x , y i z wtedy i tylko wtedy, gdy liczby te spełniają ową funkcję zdaniową (por. § § 27 i 34); można skonstruować definicję, która wprowadzi symbol oznaczający omawianą relację. Lecz jeśli nadajemy definiendum postać:

$$x = y - z \quad \text{lub} \quad x = y : z,$$

to z góry zakładamy, że relacja jest jednoznaczna (czyli działanie lub funkcja, por. § 34), a wobec tego, że dla dwóch dowolnych liczb y i z istnieje co najwyżej jedna liczba x pozostająca z nimi w omawianej relacji. Wszelako warunek, by relacja ta była jednoznaczna, nie jest automatycznie spełniony i jego słuszność musimy najpierw ustalić. Uczyniliśmy to w przypadku Definicji 2, ale nie dla podanej wyżej definicji ilorazu. Aktualnie nie byłibyśmy w stanie sprawdzić jej słuszności po prostu dlatego, że relacja, o której tu mowa, w pewnych wyjątkowych przypadkach przestaje być jednoznaczna. Jeśli bowiem

$$y = 0 \quad \text{i} \quad z = 0,$$

to istnieje nieskończenie wiele liczb x , dla których

$$y = z \cdot x.$$

Jeśli zatem chcemy sformułować definicję ilorazu w podanej wyżej postaci, nie popadając jednocześnie w sprzeczność, musimy wyłączyć przypadek, w którym obie liczby y i z są 0 – na przykład umieszczając w definiens dodatkowy warunek.

Rozważania te prowadzą do następującego wniosku. Każdą definicję typu Definicji 2 powinno poprzedzać twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 15, a więc twierdzenie, które głosi, że istnieje tylko jedna liczba x , spełniająca definiens. (Powstaje pytanie, czy chodzi o to, by mieć dokładnie jedną liczbę x , czy może wystarczy, by istniała co najwyżej jedna taka liczba. Nie będziemy tu rozstrząsać tej raczej trudnej kwestii.)*

§54 Twierdzenia o odejmowaniu

W oparciu o Definicję 2 i prawa dodawania możemy bez trudu udowodnić podstawowe twierdzenia odnośnie odejmowania, a więc prawo wykonalności, prawa monotoniczności oraz prawa przekształcania równań i nierówności za pomocą odejmowania. Mamy tu także twierdzenia rządzące przekształcaniem tak zwanych sum algebraicznych,

czyli wyrażeń, które składają się ze stałych numerycznych i symboli zmiennych rozdzielonych znakami „+” i „-”, jak również nawiasami (które często się omija zgodnie ze specjalnymi konwencjami). Jako przykład ostatniej kategorii może służyć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 16. $x + (y - z) = (x + y) - z$.

Dowód. Dowolnym liczbom y i z zgodnie z Aksjوماتem 9 odpowiada taka liczba u , że

$$(1) \quad y = z + u;$$

co na mocy Definicji 2 pociąga za sobą

$$(2) \quad u = y - z.$$

Prawo przemienności głosi, że

$$x + y = y + x.$$

W oparciu o (1) „ y ” po prawej stronie można zastąpić przez „ $z + u$ ”, a wtedy otrzymamy:

$$(3) \quad x + y = (z + u) + x.$$

Z drugiej strony, z Twierdzenia 9 wynika, że

$$(4) \quad z + (x + u) = (z + u) + x.$$

Ale ponieważ dwie liczby, równe trzeciej liczbie, są sobie równe, to (4) w zestawieniu z (3) daje:

$$(5) \quad x + y = z + (x + u).$$

A ponieważ $x + u$ i $x + y$ są liczbami (na mocy Aksjomatu 6), za „ x ” i „ y ” w Definicji 2 możemy podstawić „ $x + u$ ” i „ $x + y$ ”. Wzór (5) pokazuje, że wówczas definiens jest spełniony, a zatem definiendum musi również zachodzić:

$$x + u = (x + y) - z.$$

Jeśli teraz w ostatnim równaniu na mocy (2) zastąpimy „ u ” przez „ $y - z$ ”, ostatecznie dojdziemy do:

$$x + (y - z) = (x + y) - z,$$

q. e. d.

Na tym kończymy konstrukcję naszego fragmentu arytmetyki.

Ćwiczenia

1. Rozważyć następujące trzy systemy, z których każdy składa się z pewnego zbioru, dwóch relacji i jednego działania:

- (a) zbiór wszystkich liczb, relacje $\leq$ i $\geq$, działanie dodawania;
- (b) zbiór wszystkich liczb, relacje $<$ i $>$, działanie mnożenia;
- (c) zbiór wszystkich liczb dodatnich, relacje $<$ i $>$, działanie mnożenia.

Określić (na podstawie znanych praw arytmetyki), które z tych systemów są modelami systemu Aksjomatów 1–11 (por. § 37).

2. Weźmy pod uwagę dowolną prostą, którą będziemy nazywać osią liczbową i niech punkty na tej prostej będą oznaczone literami „ X ”, „ Y ”, „ Z ”, Na osi liczbowej wybieramy stały punkt początkowy O i pewien punkt jednostkowy J różny od O . Niech teraz X i Y będą dwoma różnymi punktami na naszej prostej. Rozważamy dwie półproste, przy czym jedna zaczyna się w O i biegnie przez J , druga zaś zaczyna się w X i przechodzi przez Y . Powiemy, że punkt X poprzedza punkt Y , symbolicznie:

$$X \overset{\circ}{<} Y,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy albo te dwie półproste są identyczne, albo gdy jedna z nich – wszystko jedno która – jest częścią drugiej. W tych samych okolicznościach powiemy też, że punkt Y następuje po punkcie X , co zapiszemy:

$$Y \overset{\circ}{>} X.$$

Punkt Z nazywamy sumą punktów X i Y , jeśli spełnia on następujące warunki: (i) odcinek OX jest przystający do odcinka YZ ; (ii) jeśli $O \overset{\circ}{<} X$, to $Y \overset{\circ}{<} Z$, lecz jeśli $O \overset{\circ}{>} X$, to $Y \overset{\circ}{>} Z$. Sumę punktów X i Y oznaczamy przez:

$$X \overset{\circ}{+} Y.$$

Stosując prawa geometrii wykazać, że zbiór wszystkich punktów osi liczbowej (czyli sama oś liczbowa), relacje $\overset{\circ}{<}$ i $\overset{\circ}{>}$ i działanie $\overset{\circ}{+}$ tworzą model przyjętego przez nas systemu aksjomatycznego i że system ten ma dlatego interpretację w geometrii.

3. Bierzemy pod uwagę cztery działania A , B , W i M , które – podobnie jak dodawanie – dwom dowolnym liczbom przyporządkowują trzecią liczbę. Za wynik działania A na liczbach x i y zawsze uważamy liczbę x , zaś za wynik działania B – liczbę y :

$$xAy = x, \quad xBy = y.$$

Symbolami „ xWy ” lub „ xMy ” oznaczamy tę z dwóch liczb x i y , która, odpowiednio, nie jest mniejsza lub większa od drugiej z nich, inaczej mówiąc

$$\begin{aligned} xWy = x \quad \text{i} \quad xMy = y \quad &\text{w przypadku, gdy } x \geq y; \\ xWy = y \quad \text{i} \quad xMy = x \quad &\text{w przypadku, gdy } x \leq y. \end{aligned}$$

Które z własności omówionych w § 47 przysługują każdemu z tych czterech działań? Czy zbiór wszystkich liczb jest grupą, w szczególności grupą abelową ze względu na któreś z tych działań?

4. Niech K będzie klasą wszystkich zbiorów punktów (lub wszystkich konfiguracji geometrycznych). Czy dodawanie i mnożenie zbiorów (zdefiniowane w § 25) jest wykonalne, przemienne, łączne i odwracalne w klasie K ? Czy zatem klasa K jest grupą, a w szczególności grupą abelową ze względu na któreś z tych działań?

5. Wykazać (na podstawie znanych praw arytmetyki), że zbiór wszystkich liczb nie jest grupą abelową ze względu na mnożenie, ale każdy z następujących zbiorów jest grupą abelową ze względu na to działanie:

- (a) zbiór wszystkich liczb różnych od 0;
- (b) zbiór wszystkich liczb dodatnich;
- (c) zbiór złożony z dwóch liczb: 1 i -1 .

6. Rozważyć zbiór Z złożony z liczb 0 i 1, i niech działanie $\oplus$ na elementach tego zbioru będzie zdefiniowane następującymi wzorami:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Ustalić, czy zbiór Z jest grupą abelową ze względu na działanie $\oplus$.

7. Rozważyć zbiór Z złożony z trzech liczb 0, 1 i 2. Zdefiniować działanie $\oplus$ na elementach tego zbioru tak, by zbiór Z był grupą abelową ze względu na to działanie.

8. Udowodnić, że żaden zbiór złożony z dwóch lub trzech różnych liczb nie może być grupą abelową ze względu na dodawanie. Czy istnieje zbiór, który składa się z jednej liczby i tworzy grupę abelową ze względu na dodawanie?

9. Z Aksjomatów 6–8 wyprowadzić następujące twierdzenia:

$$(a) \quad x + (y + z) = (z + x) + y;$$

$$(b) \quad x + [y + (z + t)] = (t + y) + (x + z).$$

10. Ile wyrażeń da się otrzymać z każdego podanego niżej wyrażenia, jeśli przekształcimy je wyłącznie w oparciu o Aksjomaty 6–8?

$$x + (y + z), \quad x + [y + (z + t)], \quad x + \{y + [z + (t + u)]\}.$$

11. Sformułować ogólną definicję lewostronnej monotoniczności działania binarnego D względem (binarnej) relacji R .

12. Na podstawie przyjętych przez nas aksjomatów i wyprowadzonych z nich twierdzeń udowodnić, że dodawanie jest działaniem monotonicznym względem każdej z relacji $\neq, \leq, \geq$.

13. Ustalić (w oparciu o znane prawa arytmetyki), czy mnożenie jest działaniem monotonicznym względem każdej z dwu relacji $< i >$ w następujących zbiorach:

(a) w zbiorze wszystkich liczb,

(b) w zbiorze wszystkich liczb dodatnich,

(c) w zbiorze wszystkich liczb ujemnych.

14. Które z działań zdefiniowanych w ćwiczeniu 3 są monotoniczne względem innych relacji $=, <, >, \neq, \leq, \geq$?

15. Czy dodawanie i mnożenie klas jest monotoniczne względem relacji inkluzji? A względem każdej innej relacji między klasami, które omówiliśmy w § 24?

16. Z naszych aksjomatów wyprowadzić następujące twierdzenie:

$$\text{jeśli } x < y \text{ i } z < t, \text{ to } x + z < y + t.$$

W zdaniu tym zastąpić symbol „ $<$ ” po kolei symbolami „ $>$ ”, „ $=$ ”, „ $\neq$ ”, „ $\leq$ ”, „ $\geq$ ” i zbadać, które ze zdań otrzymanych w ten sposób są prawdziwe.

17. Podać przykłady zamkniętych systemów twierdzeń z zakresu arytmetyki i geometrii.

18. Z naszych aksjomatów wyprowadzić następujące twierdzenia:

(a) *jeśli $x + x = y + y$, to $x = y$;*

(b) *jeśli $x + x < y + y$, to $x < y$;*

(c) *jeśli $x + x > y + y$, to $x > y$.*

Wskazówka. Udowodnić najpierw zdania odwrotne (wykorzystując wyniki z ćwiczenia 16), po czym wykazać, że tworzą one system zamknięty.

***19.** Dowolne twierdzenie, które da się wyprowadzić z Aksjomatów 6–9, można, oczywiście, przenieść na dowolne grupy abelowe, gdyż dana klasa K , która tworzy grupę abelową ze względu na działanie D , stanowi także razem z tym działaniem model Aksjomatów 6–9 (por. §§ 37 i 38).[†] Stosuje się to w szczególności do Twierdzenia 11 (z uwagi na drugi dowód tego twierdzenia), my zaś mamy następujący ogólny teoriogrupowy wynik:

każda klasa K , która jest grupą abelową ze względu na działanie D , spełnia następujący warunek:
jeśli $x \in K$, $y \in K$, $z \in K$, oraz $xDy = xDz$, to $y = z$.

Podać dokładny dowód tego twierdzenia.

Pokazać też, że Twierdzenia (a) w ćwiczeniu 18 nie da się uogólnić na dowolne grupy abelowe, posługując się przykładem klasy K i działania D o następujących własnościach: (i) klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D ; (ii) istnieją dwa różne elementy x i y klasy K , dla których $xDx = yDy$ (por. ćwiczenie 6). Wobec tego, czy da się wyprowadzić Twierdzenie (a) z samych tylko Aksjomatów 6–9?

[†]Rzecz jasna, Aksjomaty 6–9 w pełni charakteryzują grupy abelowe, wobec czego można obostrzyć stwierdzenie w tym ćwiczeniu powołując się na następującą (metodologiczną) definicję: *Mówimy, że zbiór K jest (lub tworzy) grupą abelową ze względu na działanie D wtedy i tylko wtedy, gdy K i D wspólnie stanowią model Aksjomatów 6–9.* Kilka ćwiczeń w tym rozdziale faktycznie wykorzystuje tę definicję.

20. Przekształcić dowód Twierdzenia 14 w taki sposób, by pasował on do schematu naszkicowanego w § 49 w związku z pierwszym dowodem Twierdzenia 11.

21. Czy możemy powiedzieć, że dzielenie jest działaniem odwrotnym względem mnożenia w zbiorze wszystkich liczb?

22. Czy dla działań wymienionych w ćwiczeniach 3 i 4 istnieją działania odwrotne (odpowiednio, w zbiorze wszystkich liczb i w klasie wszystkich konfiguracji geometrycznych)?

23. Jakie działania są lewostronnym i prawostronnym odwróceniem odejmowania (w zbiorze wszystkich liczb)?

***24.** W § 53 podaliśmy przykładowo definicję symbolu „0”. Aby mieć pewność, że definicja ta nie prowadzi do sprzeczności, należy najpierw ustalić następujące twierdzenie:

Istnieje dokładnie jedna taka liczba x , że dla dowolnej liczby y , mamy: $y + x = y$.

Udowodnić to twierdzenie tylko na podstawie Aksjomatów 6–9.

25. Sformułować zdania, które wyrażałyby, że odejmowanie jest wykonalne, przemienne, łączne, prawo- i lewostronnie odwracalne, prawo- i lewostronnie monotoniczne względem relacji mniejszości. Które z tych zdań są prawdziwe? Udowodnić je, w oparciu o nasze aksjomaty i Definicję 2 z § 52.

26. Wyprowadzić następujące twierdzenia z naszych aksjomatów i Definicji 2:

$$(a) \quad x - (y + z) = (x - y) - z,$$

$$(b) \quad x - (y - z) = (x - y) + z,$$

$$(c) \quad x + y = x - [(x - y) - x].$$

***27.** W oparciu o prawo wykonalności dla odejmowania i Twierdzenie (c) z poprzedniego ćwiczenia udowodnić następujące twierdzenie:

Na to, by zbiór liczb K był grupą abelową ze względu na dodawanie, potrzeba i wystarcza, by różnica dowolnych dwóch liczb, należących do zbioru K , była również elementem zbioru K (czyli, by wzory $x \in K$ i $y \in K$ zawsze pociągały za sobą $x - y \in K$.)

Korzystając z tego twierdzenia wskazać przykłady zbiorów liczb, będących grupami abelowymi ze względu na dodawanie.

28. Za pomocą symboli logicznych zapisać wszystkie aksjomaty, definicje i twierdzenia podane w ostatnich dwóch rozdziałach.

Wskazówka. Twierdzenie 15 należy najpierw przekształcić do postaci równoważnej tak, by wyeliminować kwantyfikatory liczbowe zgodnie z objaśnieniami w § 20.

***29.** Za pomocą symboli logicznych zapisać wzory, które wyrażają warunek, że dana klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D (zgodnie z definicją podaną w § 47). Ponadto rozważyć następujące trzy wzory:

$$(a) \quad \forall_{x,y}[(x \in K \wedge y \in K) \rightarrow xDy \in K].$$

$$(b) \quad \forall_{x,y,z}[(x \in K \wedge y \in K \wedge z \in K) \rightarrow (xDy)Dz = xD(yDz)].$$

$$(c) \quad \forall_{x,y}[(x \in K \wedge y \in K) \rightarrow \exists_z(z \in K \wedge x = yDz \wedge x = zDy)].$$

Spróbować wykazać, że wzory te przedstawiają równoważną definicję pojęcia grupy abelowej; innymi słowy, spróbować wykazać, że stanowią one (razem wzięte) konieczny i wystarczający warunek słuszności następującego zdania:

klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D .

IX

Rozważania metodologiczne dotyczące skonstruowanej teorii

§55 Eliminacja zbytecznych aksjomatów z pierwotnego systemu aksjomatycznego

W poprzednich dwóch rozdziałach naszkicowaliśmy podstawy elementarnej teorii matematycznej, będącej fragmentem arytmetyki. W tym rozdziale przejdziemy do rozważań metodologicznych, przy czym najpierw zajmiemy się systemem aksjomatów oraz terminów pierwotnych, na których opiera się owa teoria.

Wyjdziemy od konkretnych przykładów, ilustrujących rozważania z § 39; przykłady te dotyczą takich zagadnień jak dowolność wyboru aksjomatów i terminów pierwotnych, możliwość pominięcia zbytecznych aksjomatów itp.

* * *

Zacznijmy od pytania, czy nasz system Aksjomatów 1–11 – będziemy nazywali go krótko SYSTEMEM $\mathcal{A}$ – nie zawiera przypadkiem zbędnych aksjomatów, to znaczy, czy któregośkolwiek z jego aksjomatów nie da się wyprowadzić z pozostałych. Od razu widzimy, że łatwo odpowiedzieć na to pytanie i, co więcej, odpowiedzieć twierdząco. W rzeczy samej:

Trzy aksjomaty Systemu $\mathcal{A}$, mianowicie, jeden z Aksjomatów 4–5, Aksjomat 6 oraz jeden z Aksjomatów 10–11, dają się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów.

Dowód. Wykażemy najpierw, że

- (I) *Aksjomaty 4 i 5 dają się wyprowadzić jeden z drugiego za pomocą Aksjomatów 1–3.*

Zauważmy, że dowód Twierdzenia 3 opierał się wyłącznie – w sposób bezpośredni lub pośredni – na Aksjomatach 1–3. Wszelako, mając do dyspozycji Twierdzenie 3, możemy z Aksjomatu 5 wyprowadzić Aksjomat 4 (lub na odwrót), rozumując następująco:

Jeśli

$$x > y \quad i \quad y > z,$$

to na mocy Twierdzenia 3

$$y < x \quad i \quad z < y;$$

stosując zatem Aksjomat 4 (w którym „ x ” zastąpiliśmy przez „ z ”, a „ z ” przez „ x ”), otrzymujemy:

$$z < x,$$

a to, znowu na mocy Twierdzenia 3, pociąga za sobą:

$$x > z,$$

czyli tezę Aksjomatu 5.

W podobny sposób można pokazać, że:

- (II) *Aksjomaty 10 i 11 dają się wyprowadzić jeden z drugiego za pomocą Aksjomatów 1–3 i 6.*

I wreszcie:

- (III) *Aksjomat 6 daje się wyprowadzić z Aksjomatów 7–9.*

*Dowód ostatniego twierdzenia nie należy do prostych i przypomina drugi dowód Twierdzenia 11. Dane są dwie dowolne liczby x i y ; stosując czterokrotnie Aksjomat 9, wprowadzamy kolejno cztery nowe liczby u , w , z oraz v tak, by zostały spełnione następujące wzory:

$$(1) \quad y = y + u,$$

$$(2) \quad u = x + w,$$

$$(3) \quad y = w + z,$$

$$(4) \quad z = y + v.$$

Ze względu na prawo przemienności z (1) wynika, że

$$y = u + y;$$

zestawiając to równanie z (4), podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 11, oraz stosując prawo łączności, otrzymujemy:

$$(5) \quad z = u + z.$$

Stąd zaś, wobec (2), dostajemy:

$$z = (x + w) + z,$$

i dalej, na mocy prawa łączności, dochodzimy do wzoru:

$$z = x + (w + z),$$

z którego, wobec (3), wynika:

$$(6) \quad z = x + y.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że dla dowolnych dwóch liczb x i y istnieje liczba z , dla której zachodzi wzór (6), a to właśnie jest treścią Aksjomatu 6.[†]

Można jeszcze dodać, że naszkicowane powyżej rozumowanie stosuje się nie tylko do dodawania, lecz – zgodnie z ogólnymi uwagami w §§ 37 i 38 – również do każdego innego działania; działanie D , które jest przemienne, łączne i prawostronnie odwracalne w klasie K , jest również wykonalne w tej klasie, zatem klasa K tworzy grupę abelową ze względu na działanie D (por. § 47).*

* * *

[†]Wnikliwy czytelnik zauważy, że do powyższego wyprowadzenia Aksjomatu 6 prawo przemienności należałoby interpretować następująco: *Jeśli $x+y \in K$, gdzie K jest dziedziną teorii, to również $y+x \in K$, przy czym oba te elementy są równe.* Podobnie rzecz się ma z prawem łączności (por. także ods. na str. 185.) – Dodajmy, że możliwość wyprowadzenia Aksjomatu 6 nie powinna dziwić. Wskazywano na nią już w ćwiczeniach 26 i *27 w rozdziale VIII.

Pokazaliśmy, że System $\mathcal{A}$ zawiera co najmniej trzy zbyteczne aksjomaty, które można pominąć. Wobec tego System $\mathcal{A}$ wolno zastąpić systemem następujących ośmiu aksjomatów:

AKSJOMAT 1⁽¹⁾. *Dla dowolnych liczb x i y mamy: $x = y$ lub $x < y$ lub $x > y$.*

AKSJOMAT 2⁽¹⁾. *Jeśli $x < y$, to $y \not< x$.*

AKSJOMAT 3⁽¹⁾. *Jeśli $x > y$, to $y \not> x$.*

AKSJOMAT 4⁽¹⁾. *Jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.*

AKSJOMAT 5⁽¹⁾. $x + y = y + x$.

AKSJOMAT 6⁽¹⁾. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AKSJOMAT 7⁽¹⁾. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 8⁽¹⁾. *Jeśli $y < z$, to $x + y < x + z$.*

Będziemy go nazywać SYSTEMEM $\mathcal{A}^{(1)}$. Twierdzimy teraz, że^{††}:

Systemy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(1)}$ są równoważne.

W porównaniu z pierwotnym systemem nowy uproszczony system posiada pewne braki, zarówno z estetycznego jak dydaktycznego punktu widzenia. Nie jest już symetryczny względem obu symboli pierwotnych „ $<$ ” i „ $>$ ”; pewne własności relacji mniejszości przyjmuje się bez dowodu, podczas gdy analogiczne własności relacji większości należy najpierw udowodnić. W systemie tym odczuwa się też brak Aksjomatu 6, który jest bardzo elementarny i intuicyjnie oczywisty, zaś jego wyprowadzenie z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$ może nastroić czytelnikowi pewne trudności.

§56 Niezależność aksjomatów systemu uproszczonego

Rodzi się teraz pytanie, czy w skład Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$ wchodzi jeszcze jakieś inne zbyteczne aksjomaty. Okazuje się, że nie:

^{††}Z § 39 pamiętamy, że są dwa analogiczne rodzaje równoważności: *pod względem środków dowodu* i *pod względem środków wyrazu*. W obecnym rozdziale termin „równoważność” odnosi się do pierwszego rodzaju (z wyjątkiem fragmentu w § 58 i w ćwiczeniu 16); owe określenia uściślające będą tu pomijane.

$\mathcal{A}^{(1)}$ jest systemem aksjomatów wzajemnie niezależnych.

Do ustalenia sformułowanego powyżej metodologicznego stwierdzenia możemy posłużyć się metodą dowodzenia przez interpretację, która jest analogiczna do metody dowodzenia przez wskazanie modelu (*vide*: §§ 37 i 38).

Mamy pokazać, że żaden z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$ nie daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów tego systemu. Ograniczymy się tu dla przykładu do Aksjomatu $2^{(1)}$. Przypuśćmy, że wszędzie w aksjomatach Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$ symbol „ $<$ ” zastąpimy symbolem „ $\leq$ ”, niczego innego poza tym nie zmieniając. Przekształcone aksjomaty, z wyjątkiem Aksjomatu $2^{(1)}$, zachowują słuszość; dokładniej, Aksjomaty $3^{(1)}$, $5^{(1)}$, $6^{(1)}$ i $7^{(1)}$ pozostają niezmienione, ponieważ nie zawierają symbolu „ $<$ ”, zaś z aksjomatów $1^{(1)}$, $4^{(1)}$ i $8^{(1)}$ uzyskamy pewne twierdzenia arytmetyczne, których dowody, przeprowadzone w oparciu o System $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{A}^{(1)}$, oraz definicję symbolu „ $\leq$ ” (por. § 46), nie przedstawiają żadnych trudności. Możemy więc powiedzieć, że zbiór wszystkich liczb $\mathbf{R}$, relacje $\leq$ i $>$ oraz działanie dodawania tworzą model Aksjomatów $1^{(1)}$ i $3^{(1)}$ – $8^{(1)}$; ponadto nasze rozumowanie pokazuje wprost, że system tych siedmiu aksjomatów znalazł nową interpretację na gruncie arytmetyki. Z drugiej strony, zdanie otrzymane przez przekształcenie Aksjomatu $2^{(1)}$ jest fałszywe, łatwo bowiem udowodnić w arytmetyce negację tego zdania. Wzór:

$$x \leq y$$

nie zawsze wyłącza, że

$$y \leq x,$$

gdyż istnieją liczby x i y , które równocześnie spełniają obie nierówności:

$$x \leq y \text{ i } y \leq x$$

(rzecz jasna, zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są równe).[†] Skoro zatem wierzymy w niesprzeczność arytmetyki (por. § 41), musimy zgodzić się z faktem, że zdanie otrzymane z Aksjomatu $2^{(1)}$

[†]Przyjrzyjmy się dokładniej przytoczonemu tu dowodowi. Wchodzi doń przekształcony Aksjomat $2^{(1)}$, który możemy wyrazić w schematycznej postaci: *dla dowolnych x i y , (...)*. W rzeczy samej, zaprzeczyliśmy mu, pokazując, że: *istnieją takie x i y , że $[\sim (...)]$* . Stwierdzenie, że te dwa zdania wzajemnie sobie przeczą z pewnością zgadza się z naszą intuicją, a wynika ono z następującej równoważności, którą zapisujemy za pomocą symboli:

$$\sim \forall_{x,y} (...) \leftrightarrow \exists_{x,y} [\sim (...)].$$

nie jest twierdzeniem należącym do tej dyscypliny. Z tego zaś wynika, że Aksjomat 2⁽¹⁾ nie da się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$, w przeciwnym bowiem razie aksjomat ten byłby słuszny w dowolnej interpretacji, w której słuszne są inne aksjomaty (por. analogiczne rozważania w § 37).

Prowadząc rozumowanie tą metodą, stosując jednak inne interpretacje lub modele, możemy otrzymać analogiczny wynik dla każdego z pozostałych aksjomatów.^{††}

* * *

*Ogólnie rzecz biorąc, można powiedzieć, że metoda dowodu przez interpretację sprowadza się do pokazania, że jakieś szczególne zdanie A nie wynika z pewnego systemu zdań $\mathcal{S}$ (które mogą być aksjomatami lub nie) danej teorii dedukcyjnej. W tym celu rozważamy dowolną teorię dedukcyjną $\mathcal{T}$ (o której przyjmujemy, że jest niesprzeczna; poza tym $\mathcal{T}$ może być tą samą teorią, do której należą prawa systemu $\mathcal{S}$). Następnie próbujemy znaleźć taką interpretację systemu $\mathcal{S}$ w obrębie tej teorii, by nie samo zdanie A , lecz jego negacja stała się jej twierdzeniem (ewentualnie aksjomatem). Jeśli nam się to uda, możemy powołać się na prawo dedukcji. Jak wiemy z § 38, głosi ono, że jeśli zdanie A da się wyprowadzić z praw systemu $\mathcal{S}$, to zdanie to pozostaje słuszne dla dowolnej interpretacji tego systemu. Wobec tego sam fakt istnienia takiej interpretacji w $\mathcal{S}$, gdzie A nie jest słuszne, dowodziłby, że takiego zdania nie da się wyprowadzić z systemu $\mathcal{S}$. – Wróćmy teraz do warunku niesprzeczności i sformułujmy nasz wniosek z większą dokładnością:

Mamy tu faktycznie przykład prawa *logiki rachunku predykatów*. O tym dziale logiki, jak pamiętamy, wspomnieliśmy krótko w § 20. (Zauważmy również, że analogiczne równoważności zakładaliśmy domyślnie w dowodach nie wprost w rozdziałach VII i VIII.)

^{††}Chcielibyśmy wyjaśnić, jak dowód ten ma się do dowodu przez wskazanie modelu. W powyższym przykładzie mamy jakby wszystkie składniki potrzebne do przeprowadzenia dowodu przez wskazanie modelu. Problem komplikuje jednak fakt, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieskończony, a w przypadku modeli nieskończonych możemy trafić na pewne dość zawile pytania o niesprzeczność. Inny sposób polega na trzymaniu się badanej teorii i rozważaniu raczej interpretacji niż modelu. W takim podejściu kwestia niesprzeczności okazuje się pojęciowo prostsza; por. dyskusja niżej. (Oczywiście, mimo to mogą się pojawić problemy wcale nie trywialne.) – Wszelako pewne dowody niezależności nakreślone w ćwiczeniach opierają się na prostych (i skończonych) modelach, dla których interpretacji, jak tych w obrębie arytmetyki, można nie brać pod uwagę.

jeśli teoria $\mathcal{T}$ jest niesprzeczna, to zdania A nie da się wyprowadzić z praw systemu $\mathcal{S}$.

Łatwo zobaczyć, dlaczego musimy zawrzeć założenie o niesprzeczności teorii $\mathcal{T}$. W przeciwnym bowiem razie teoria $\mathcal{T}$ wśród aksjomatów i twierdzeń zawierałaby dwa zdania sprzeczne i z faktu, że $\mathcal{T}$ obejmuje negację A nie moglibyśmy wyciągnąć wniosku, że teoria ta nie obejmuje samego A (czy raczej, interpretacji A); w ten sposób nasze rozumowanie upadłoby.

Aby na tej drodze dowieść niezależności danego systemu aksjomatycznego, opisaną metodę należy stosować tyle razy, ile aksjomatów zawiera dany system; za zdanie A przyjmujemy po kolei każdy aksjomat, do $\mathcal{S}$ zaś zaliczamy pozostałe aksjomaty rozważanego systemu.*

§57 Eliminacja zbytecznego terminu pierwotnego prowadząca do uproszczenia systemu aksjomatycznego; pojęcie grupy abelowej uporządkowanej

Powróćmy jeszcze raz do systemu aksjomatów $\mathcal{A}^{(1)}$. Skoro jest on niezależny, nie da się go uprościć poprzez znalezienie, a następnie wyeliminowanie zbytecznego aksjomatu. Niemniej, uproszczenia tego możemy dokonać w inny sposób. Okazuje się bowiem, że terminy pierwotne Systemu $\mathcal{A}^{(1)}$ nie są wzajemnie niezależne. Można skreślić z listy terminów pierwotnych jeden z dwóch symboli – „<” lub „>” – a potem zdefiniować jeden za pomocą drugiego. Widać to z Twierdzenia 3; twierdzenie to jest tak sformułowane, że można je uznać za definicję symbolu „>” w oparciu o symbol „<”, a po zamienieniu w nim stron równoważności – za definicję symbolu „<” w oparciu o „>”. (Przy takiej interpretacji należy twierdzenie to poprzedzić słowami „mówimy, że”; por. § 11.) Z heurystycznego punktu widzenia tego rodzaju redukcja terminów pierwotnych mogłaby wywołać sprzeciw; terminy „<” i „>” mają równie jasne znaczenie, a relacje, nimi oznaczone, posiadają zupełnie analogiczne własności. Traktowanie więc jednego z nich, jako zrozumiałego samego przez się, i definiowanie drugiego w oparciu o pierwszy wydaje się nieco sztuczne. Argumenty te nie są jednak przekonujące.

* * *

Jeśli teraz odrzucimy powyższe sprzeczwy i postanowimy skreślić jeden z omawianych symboli z listy terminów pierwotnych, staniemy przed zadaniem takiego przekształcenia naszego systemu aksjomatycznego, by nie pojawił się w nim żaden zdefiniowany termin (nawiasem mówiąc, ten postulat metodologiczny w praktyce jest często ignorowany – w geometrii zwłaszcza dla osiągnięcia większej prostoty i przejrzystości aksjomaty zazwyczaj formułuje się za pomocą terminów zdefiniowanych.) Zadanie to nie nastręcza żadnych trudności. W systemie aksjomatycznym $\mathcal{A}^{(1)}$ zastępujemy po prostu każdy wzór typu:

$$x > y$$

odpowiednim wzorem:

$$y < x$$

który – na mocy Twierdzenia 3 – jest mu równoważny. Łatwo zobaczyć, że po takim przekształceniu Aksjomat 1 (lub $1^{(1)}$) da się zastąpić prawem spójności, czyli Twierdzeniem 4, gdyż każde z tych zdań wynika z drugiego na podstawie ogólnych praw logicznych (dokładnie rzecz biorąc, jeśli pominiemy kwantyfikatory ogólne, to potrzebne są tylko pewne prawa rachunku zdań); co więcej, Aksjomat 3 staje się zwykłym podstawieniem Aksjomatu 2, a więc można go całkiem ominąć. W ten sposób dochodzimy do systemu złożonego z następujących siedmiu aksjomatów:

AKSJOMAT $1^{(2)}$. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

AKSJOMAT $2^{(2)}$. *Jeśli $x < y$, to $y \not< x$.*

AKSJOMAT $3^{(2)}$. *Jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.*

AKSJOMAT $4^{(2)}$. $x + y = y + x$.

AKSJOMAT $5^{(2)}$. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AKSJOMAT $6^{(2)}$. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT $7^{(2)}$. *Jeśli $y < z$, to $x + y < x + z$.*

Ten system aksjomatyczny – nazwijmy go SYSTEMEM $\mathcal{A}^{(2)}$ – okazuje się więc równoważny każdemu z dwu poprzednich systemów, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(1)}$. Mówiąc tak popełniamy jednak pewną nieścisłość, bowiem nie da się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ tych zdań Systemu $\mathcal{A}$

lub $\mathcal{A}^{(1)}$, które zawierają symbol „ $>$ ”, o ile nie rozszerzymy Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ o definicję tego symbolu. Jak wiemy, definicji tej można nadać następującą postać:

DEFINICJA 1⁽²⁾. *Mówimy, że $x > y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y < x$.*

Wiemy też, że na gruncie Systemu $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{A}^{(1)}$ potrafimy udowodnić przytoczone powyżej zdanie, pod warunkiem, że potraktujemy je nie jako definicję lecz zwykłe twierdzenie (czyli pominiemy początkowy zwrot „Mówimy, że”). Wobec tego fakt wzajemnej równoważności obu systemów oraz systemu rozszerzonego można sformułować następująco:

System $\mathcal{A}^{(2)}$ wraz z Definicją 1⁽²⁾ jest równoważny każdemu z Systemów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(1)}$.

Podobną ostrożność w sformułowaniach należy zachować za każdym razem, gdy porównujemy dwa systemy aksjomatyczne, które wydają się równoważne, ale zawierają – choćby tylko częściowo – różne terminy pierwotne.

* * *

System aksjomatyczny $\mathcal{A}^{(2)}$ wyróżnia się uderzającą prostotą struktury. Pierwsze trzy aksjomaty dotyczą relacji mniejszości, a łącznie stwierdzają, że zbiór $\mathbf{R}$ jest uporządkowany ze względu na tę relację. Następne trzy aksjomaty odnoszą się do dodawania i stwierdzają, że zbiór $\mathbf{R}$ jest grupą abelową ze względu na dodawanie. Wreszcie ostatni aksjomat – prawo monotoniczności – ustala związek między relacją mniejszości a działaniem dodawania. Strukturę tę da się opisać ogólnie: o klasie K mówimy, że jest UPORZĄDKOWANĄ GRUPĄ ABELOWĄ ZE WZGLĘDU NA RELACJĘ R I DZIAŁANIE D , o ile (i) klasa K jest uporządkowana przez relację R , (ii) klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D , (iii) działanie D jest monotoniczne w klasie K ze względu na relację R . Zgodnie z tą terminologią możemy teraz powiedzieć, że *system aksjomatyczny $\mathcal{A}^{(2)}$ charakteryzuje zbiór liczb jako uporządkowaną grupę abelową ze względu na relację mniejszości i działanie dodawania.*

* * *

Można ustalić następujący fakt odnośnie Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$:

System $\mathcal{A}^{(2)}$ jest niezależnym systemem aksjomatycznym, a ponadto jego trzy terminy pierwotne, mianowicie „ $\mathbf{R}$ ”, „ $<$ ” i „ $+$ ” są wzajemnie niezależne.

Pominiemy tu dowód tego twierdzenia. Zaznaczymy jedynie, że dla ustalenia wzajemnej niezależności terminów pierwotnych można zastosować ponownie metodę dowodu przez interpretację. W tym przypadku metoda ta przybiera bardziej skomplikowaną postać, a brak miejsca uniemożliwia nam podanie potrzebnych do tego celu modyfikacji.

§58 Dalsze uproszczenie systemu aksjomatycznego; możliwe przekształcenia systemu terminów pierwotnych

Oczywiście można znaleźć wiele systemów aksjomatycznych równoważnych Systemowi $\mathcal{A}^{(2)}$. Podamy tu szczególnie prosty przykład takiego systemu, który nazwiemy SYSTEMEM $\mathcal{A}^{(3)}$ i który zawiera te same terminy pierwotne, co $\mathcal{A}^{(2)}$. Składa się on tylko z pięciu praw:

AKSJOMAT 1⁽³⁾. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

AKSJOMAT 2⁽³⁾. *Jeśli $x < y$, to $y \not< x$.*

AKSJOMAT 3⁽³⁾. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

AKSJOMAT 4⁽³⁾. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 5⁽³⁾. *Jeśli $x + z < y + t$, to $x < y$ lub $z < t$.*

Pokażemy teraz, że

Systemy $\mathcal{A}^{(2)}$ i $\mathcal{A}^{(3)}$ są równoważne.

Dowód. Widzimy przede wszystkim, że każdy aksjomat Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ jest albo zawarty w Systemie $\mathcal{A}$ (Aksjomat 2⁽³⁾ pokrywa się z Aksjomatem 2, zaś Aksjomat 4⁽³⁾ – z Aksjomatem 9), albo został udowodniony na gruncie tego systemu (Aksjomaty 1⁽³⁾, 3⁽³⁾ i 5⁽³⁾ jako Twierdzenia, odpowiednio, 4, 9 i 14). Ale ponieważ systemy aksjomatyczne $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(2)}$ są – jak wiemy z §57 – równoważne (wszakże Definicję 1⁽²⁾ wolno nam zawsze dodać do Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$), możemy powiedzieć, że wszystkie zdania Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ dają się udowodnić na

gruncie Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$.[†] Pozostaje wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ te prawa Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$, których nie ma w $\mathcal{A}^{(3)}$, mianowicie Aksjomaty $3^{(2)}$, $4^{(2)}$, $5^{(2)}$ i $7^{(2)}$. Zadanie to nie jest wcale proste.

*Zacznijmy od Aksjomatów $4^{(2)}$ i $5^{(2)}$.

(I) *Aksjomat $4^{(2)}$ daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

Do dowolnych dwóch liczb x i y możemy zastosować Aksjomat $4^{(3)}$ (w którym za „ y ” podstawiamy „ x ” i na odwrót). Istnieje zatem taka liczba z , że

$$(1) \quad y = x + z.$$

Jeśli w Aksjomacie $3^{(3)}$ zastąpimy teraz „ y ” przez „ x ”, otrzymamy:

$$(2) \quad x + (x + z) = (x + z) + x.$$

Wobec (1) „ $x + z$ ” wolno nam tutaj zastąpić po obu stronach przez „ y ” i dojdziemy do Aksjomatu $4^{(2)}$:

$$x + y = y + x.$$

(II) *Aksjomat $5^{(2)}$ daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

[†]Dokładniej sytuację tę można opisać następująco. System $\mathcal{A}^{(3)}$, kiedy go rozszerzymy przyłączając Definicję $1^{(2)}$, staje się równoważny Systemowi $\mathcal{A}$. Można jednakże pokazać (za pomocą technik należących do dziedziny *metamatematyki*), że każdy – otrzymany z takiego rozszerzonego systemu – wynik, który nie zawiera symbolu „ $>$ ”, da się też otrzymać z samego tylko Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$, bez użycia Definicji $1^{(2)}$. Ponieważ wszystkie prawa Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ zostały wydedukowane z Systemu $\mathcal{A}$, dochodzimy do wniosku (na podstawie równoważności), że da się je również wydedukować z rozszerzonego systemu, a zatem (w świetle powyższych uwag) – z Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$. – Czytelnikowi, który chciałby sprawdzić ostatni wniosek elementarnymi środkami, radzimy przeanalizować powyższe wyprowadzenie krok po kroku, by przekonać się, że w każdym z tych przypadków definicję można pominąć.

W rzeczy samej, z Aksjomatu 3⁽³⁾ otrzymujemy (przez podstawienie „y” za „z” i odwrotnie):

$$x + (z + y) = (x + y) + z;$$

na mocy wyprowadzonego już w (I) prawa przemienności wolno nam tu zastąpić „z + y” przez „y + z”, w wyniku czego otrzymujemy Aksjomat 5⁽²⁾:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Aby ułatwić sobie wyprowadzenie Aksjomatów 3⁽²⁾ i 7⁽²⁾, pokażemy najpierw, jak można uzasadnić na gruncie Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ niektóre aksjomaty i twierdzenia podane w poprzednich rozdziałach.

(III) *Aksjomat 6 daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

Istotnie, w § 55 widzieliśmy, że Aksjomat 6 daje się wydedukować z Aksjomatów 7, 8 i 9. Aksjomaty 7 i 8 pokrywają się z Aksjomatami 4⁽²⁾ i 5⁽²⁾, a zatem – na mocy (I) i (II) – można je wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$. Natomiast Aksjomat 9 występuje jako Aksjomat 4⁽³⁾ w Systemie $\mathcal{A}^{(3)}$. Tak więc Aksjomat 6 jest wnioskiem z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.

(IV) *Twierdzenie 11 daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

W drugim dowodzie Twierdzenia 11, podanym w § 49, opieraliśmy się wyłącznie na Aksjomatach 7, 8 i 9. Twierdzenie 11 daje się więc wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ na tej samej podstawie co Aksjomat 6; patrz (III).

(V) *Twierdzenie 1 daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

Wystarczy zauważyć, że dowód Twierdzenia 1, podany w § 44, opiera się wyłącznie na Aksjomacie 2, który z kolei pokrywa się z Aksjomatem 2⁽³⁾ Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.

(VI) *Twierdzenie 12 daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

Przyjmijmy założenie Twierdzenia 12:

$$x + y < x + z;$$

zastosujmy Aksjomat 5⁽³⁾, zastępując w nim „ z ”, „ y ” i „ t ” odpowiednio przez „ y ”, „ x ” i „ z ”. Wynika z tego, że musi zachodzić jeden ze wzorów:

$$x < x \quad \text{lub} \quad y < z;$$

pierwszy odrzucamy, gdyż jest on sprzeczny z Twierdzeniem 1, które wyprowadziliśmy już z Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ – por. (V). Wobec tego otrzymujemy tezę Twierdzenia 12:

$$y < z.$$

(VII) *Aksjomat 3⁽²⁾ daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$.*

Przyjmijmy założenie Aksjomatu 3⁽²⁾, czyli wzory:

$$(1) \quad x < y$$

oraz

$$(2) \quad y < z.$$

Na mocy wyprowadzonego już Aksjomatu 6, por. (III), istnieją dwie liczby $y + x$ i $y + z$. Gdybyśmy mieli:

$$y + x = y + z,$$

to z wyprowadzonego już w (IV) Twierdzenia 11 wynikałoby, że

$$x = z.$$

Wtedy w (1) „ x ” moglibyśmy zastąpić przez „ z ”, co doprowadziłoby do:

$$z < y.$$

Nierówność ta jest sprzeczna z (2) na mocy Aksjomatu 2⁽³⁾ i dlatego musimy ją odrzucić. Tak więc mamy:

$$(3) \quad y + x \neq y + z.$$

Ponieważ $y + x$ i $y + z$ są liczbami, to na podstawie (3) i w oparciu o Aksjomat 1⁽³⁾ wolno nam sądzić, że musi zachodzić jeden z następujących przypadków:

$$(4) \quad y + x < y + z \text{ lub } y + z < y + x.$$

Rozważmy drugi z wzorów (4), w którym na mocy wyprowadzonego już Aksjomatu 4⁽²⁾ możemy zastąpić „ $y + x$ ” przez „ $x + y$ ”. Docho-
dzimy wówczas do:

$$y + z < x + y.$$

Do tego wzoru stosujemy Aksjomat 5⁽³⁾, w którym zastępujemy „ x ” i „ t ” przez „ y ”, „ y ” zaś – przez „ x ”. W ten sposób otrzymujemy następującą tezę:

$$y < x \text{ lub } z < y.$$

Wynik ten trzeba jednak odrzucić, gdyż (wobec Aksjomatu 2⁽³⁾) przeczy on wzorom (1) i (2), które stanowią założenie Aksjomatu 3⁽²⁾. Wracamy wobec tego do pierwszego wzoru w (4) i stosujemy Twierdzenie 12, o którym z (VI) wiemy, że daje się wyprowadzić (i w którym „ x ” zastępujemy przez „ y ” i na odwrót); tak więc otrzymujemy:

$$x < z,$$

czyli tezę Aksjomatu 3⁽²⁾.

(VIII) *Aksjomat 7⁽²⁾ daje się wyprowadzić z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}$ ⁽³⁾.*

Postępowanie tutaj jest zbliżone do poprzedniego, choć niewątpliwie prostsze. Przyjmujemy założenie Aksjomatu 7⁽²⁾:

$$(1) \quad y < z.$$

Gdyby:

$$x + y = x + z,$$

to z Twierdzenia 11 mielibyśmy, że

$$y = z;$$

wobec czego moglibyśmy zastąpić w (1) „ y ” przez „ z ” i dojść do sprzeczności z Twierdzeniem 1, wyprowadzonym w (V). Zatem:

$$x + y \neq x + z,$$

skąd na mocy Aksjomatu 1⁽³⁾ :

$$(2) \quad x + y < x + z \text{ lub } x + z < x + y.$$

Do tego miejsca wyprowadzenie to bardzo przypomina poprzednie. Teraz do drugiej nierówności stosujemy Twierdzenie 12 i otrzymujemy:

$$z < y,$$

nierówność ta jednak w myśl Aksjomatu 2⁽³⁾ przeczy naszemu założeniu (1). Wobec tego musimy przyjąć pierwszą nierówność z (2):

$$x + y < x + z,$$

a to właśnie jest teza Aksjomatu 7⁽²⁾.*

Zobaczyliśmy więc, że wszystkie zdania Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ wynikają z Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ i na odwrót; ustaliliśmy zatem, że dwa systemy aksjomatyczne, $\mathcal{A}^{(2)}$ i $\mathcal{A}^{(3)}$, są równoważne.

* * *

System $\mathcal{A}^{(3)}$ jest niewątpliwie prostszy od Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$, a jeszcze bardziej od Systemów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(1)}$. Szczególnie pouczające jest porównanie systemów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{(3)}$; w wyniku kolejnych redukcji pierwotna liczba aksjomatów zmniejszyła się przeszło dwukrotnie. Z drugiej strony, należy zaznaczyć, że pewne zdania Systemu $\mathcal{A}^{(3)}$ (konkretnie, Aksjomaty 3⁽³⁾ i 5⁽⁴⁾) mają mniej naturalną postać i nie są proste w porównaniu z aksjomatami z innych systemów, zaś dowody kilku twierdzeń, nawet najbardziej elementarnych, są trudniejsze i bardziej złożone, niż dowody przeprowadzone w oparciu o te inne systemy.

* * *

Podobnie jak w przypadku aksjomatów, potrafimy też znaleźć systemy terminów pierwotnych równoważne danemu systemowi. Odnosi się to w szczególności do systemu trzech terminów „**R**”, „ $<$ ” i „ $+$ ”, występujących jako jedyne terminy pierwotne w rozważanym ostatnio systemie aksjomatycznym. Jeśli w systemie tym zastąpimy na przykład symbol „ $<$ ” symbolem „ $\leq$ ”, otrzymamy system równoważny, gdyż drugi symbol został zdefiniowany za pomocą pierwszego, zaś Twierdzenie 8 mówi, jak można pierwszy zdefiniować za pomocą drugiego. Takie przekształcenie systemu terminów pierwotnych nie byłoby jednak pod żadnym względem korzystne, w szczególności zaś

nie przyczyniłoby się do uproszczenia aksjomatów; co więcej, czytelnikowi bardziej oswojonemu z symbolem „ $<$ ” niż z „ $\leq$ ” mogłoby się ono wydać sztuczne. Inny system równoważny otrzymamy zastępując „ $+$ ” w pierwotnym systemie przez „ $-$ ”, ale to przekształcenie również nie byłoby celowe. – Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o tym, że znane są systemy terminów pierwotnych, równoważne rozważanemu systemowi, złożone jednak z tylko dwóch terminów.

§59 Zagadnienie niesprzeczności skonstruowanej teorii

Poruszymy teraz krótko dwa podstawowe zagadnienia dotyczące rozważanego wyżej fragmentu arytmetyki i jego metodologii, mianowicie kwestie niesprzeczności i zupełności (por. § 41). Ze względu na równoważność omawianych systemów aksjomatycznych nasze uwagi będą się stosować do wszystkich z nich, choć będziemy mówić tylko o Systemie $\mathcal{A}$.

Skoro wierzymy w niesprzeczność całej arytmetyki liczb rzeczywistych (założenie to uczyniliśmy poprzednio i będzie ono obowiązywać w naszych dalszych rozważaniach), to tym bardziej musimy przyjąć, że:

Teoria matematyczna oparta na Systemie $\mathcal{A}$ jest niesprzeczna.

O ile jednak każda próba ścisłego dowodu niesprzeczności całej arytmetyki prowadzi do zasadniczych trudności (por. § 41), dowód tego rodzaju dla Systemu $\mathcal{A}$ jest nie tylko możliwy, ale stosunkowo prosty. Wynika to między innymi z faktu, że zasób twierdzeń, dających się wyprowadzić z systemu aksjomatycznego $\mathcal{A}$, jest rzeczywiście niewielki; w oparciu o niego nie potrafimy odpowiedzieć na przykład na nader elementarne pytanie, czy jakieś różniące się liczby w ogóle istnieją. Okoliczność ta bardzo ułatwia dowiedzenie, że w rozważanym fragmencie arytmetyki nie występuje ani jedna para twierdzeń sprzecznych. Wszelako za pomocą środków, którymi tu rozporządzamy, nie dałoby się naszkicować dowodu niesprzeczności, ani nawet próbować zapoznać czytelnika z jego zasadniczą myślą; wymagałoby to o wiele głębszej znajomości logiki, zaś niezbędną czynnością przygotowawczą byłoby przedstawienie rozważanego fragmentu arytmetyki jako sformalizowanej teorii dedukcyjnej (por. § 40). Można dodać, że gdybyśmy rozszerzyli System $\mathcal{A}$ o jedno tylko zdanie, które

orzeka, że istnieją co najmniej dwie różne liczby, to każda próba dowiedzenia niesprzeczności rozszerzonego w ten sposób systemu aksjomatycznego napotykałaby na poważne trudności tego samego rzędu co w przypadku rozmaitych pełniejszych systemów aksjomatycznych dla liczb rzeczywistych.[†]

§60 Zagadnienie zupełności skonstruowanej teorii

W porównaniu z kwestią niesprzeczności zupełność Systemu $\mathcal{A}$ przedstawia się o wiele prościej.

Istnieje mnóstwo zagadnień, które można sformułować przy użyciu wyłącznie terminów logicznych oraz wyrazów pierwotnych Systemu $\mathcal{A}$, lecz których nie da się rozstrzygnąć na gruncie tego systemu. O jednym takim zagadnieniu wspominaliśmy już w poprzednim paragrafie. Inny przykład przedstawia prawo mówiące, że dla dowolnej

[†]Na tym etapie czytelnik może jeszcze nie doceniać różnic między rozmaitymi teoriami arytmetycznymi. Ogólna sytuacja może się wydawać dość zawiła, więc spróbujmy sformułować inaczej oraz uzupełnić powyższe streszczenie. Dowód niesprzeczności pewnej elementarnej teorii liczb rzeczywistych (patrz §41 i niżej) zazwyczaj zależy od rozwiązania poważnych problemów technicznych, z którymi jednak można sobie poradzić. Uwagi te stosują się w szczególności do Systemu $\mathcal{A}$ rozszerzonego w opisany sposób. (Problemów takich, co więcej, w specjalnych przypadkach daje się unikać, jak w przypadku nie rozszerzonego Systemu $\mathcal{A}$.) Z drugiej strony, gdy mamy do czynienia z arytmetyką liczb naturalnych lub wszystkich liczb całkowitych i włączamy cztery podstawowe działania na odpowiednich liczbach, to dowód niesprzeczności musi napotykać na trudności natury podstawowej. – Ta zasadnicza różnica obejmuje również zagadnienie zupełności. Wbudowana niezupełność, opisana tamże, odnosi się w szczególności do tych ostatnich teorii. Dla kontrastu, wybierając w odpowiedni sposób terminy pierwotne i aksjomaty, można skonstruować elementarną teorię liczb rzeczywistych, która jest zupełna. – Różnicę między teoriami elementarnymi i nie-elementarnymi omówiliśmy już w cytowanym miejscu. Tu powtarzamy: w teoriach elementarnych nie występuje pojęcie zbioru (liczb, punktów, etc.). Ograniczenie to oznacza w szczególności, że w elementarnych teoriach liczb rzeczywistych nie można wprowadzić zbioru liczb naturalnych, ani zbioru liczb całkowitych i dlatego można ominąć wspomniane wyżej podstawowe trudności. Co zaś do nie-elementarnych teorii, mamy tu jako przykład całą arytmetykę liczb rzeczywistych, która zostanie omówiona w następnym rozdziale. – W świetle powyższych rozważań należałoby może wrócić do zastrzeżenia uczynionego na początku rozdziału VII: „... *logika jest jedyną teorią wcześniejszą*.” Widzimy, że trzeba by obwarować je ograniczeniem: powinno się podać dokładnie, jakie gałęzie logiki są brane pod uwagę.

liczby x istnieje taka liczba y , że

$$x = y + y.$$

W oparciu o aksjomaty tylko Systemu $\mathcal{A}$ nie jesteśmy w stanie ani udowodnić, ani obalić tego prawa. Widać to z następującego rozumowania. Otóż symbolem $\mathbf{R}$ oznaczyliśmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; inaczej mówiąc, zbiór $\mathbf{R}$ zawiera jako elementy liczby całkowite i ułamki właściwe, liczby wymierne i niewymierne. Ale jak łatwo się przekonać, wszystkie aksjomaty, a tym samym wszystkie twierdzenia, które z nich wynikają, zachowałyby słuszność, gdybyśmy symbolem $\mathbf{R}$ oznaczyli albo zbiór wszystkich liczb całkowitych (dodatnich, ujemnych i zera), albo zbiór wszystkich liczb wymiernych; innymi słowy, wszystkie te zdania pozostałyby słuszne, gdyby wyraz „liczba” oznaczał tyle, co albo „liczba całkowita” albo „liczba wymierna”. W pierwszym przypadku zdanie, które mówi, że dla jakiegokolwiek liczby istnieje inna liczba, będąca jej połową, byłoby fałszywe, w drugim natomiast – prawdziwe. Jeśli więc udało się nam udowodnić je w oparciu o System $\mathcal{A}$, doszlibyśmy do sprzeczności w przypadku zbioru liczb całkowitych; natomiast jeśli byłibyśmy w stanie je obalić, mielibyśmy do czynienia ze sprzecznością w przypadku zbioru liczb wymiernych.

Rozumowanie, które tu naszkicowaliśmy, zalicza się do kategorii dowodu przez wskazanie modelu; w dowód przez interpretację (por. § 37 i 56) można je przekształcić w sposób następujący. Niech „ $\mathbf{Z}$ ” oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych, zaś „ $\mathbf{Q}$ ” – zbiór liczb wymiernych. Podamy teraz dwie interpretacje Systemu $\mathcal{A}$ w obrębie arytmetyki. Symbole „ $<$ ”, „ $>$ ” i „ $+$ ” pozostają niezmienione w obu interpretacjach, natomiast symbol „ $\mathbf{R}$ ”, który występuje bezpośrednio lub pośrednio w każdym z aksjomatów, zostanie zastąpiony przez „ $\mathbf{Z}$ ” w pierwszej, a przez „ $\mathbf{Q}$ ” w drugiej interpretacji.[†] (Nie bierzemy tu pod uwagę komentarza z § 43 o możliwej eliminacji symbolu „ $\mathbf{R}$ ”, ponieważ skomplikowałoby to nieco nasze rozumowanie.) Wszystkie aksjomaty Systemu $\mathcal{A}$ zachowują słuszność w obu interpretacjach. Wszelako zdanie:

dla każdej liczby x istnieje taka liczba y , że $x = y + y$,

[†]Pamiętając poprzedni odsyłacz czytelnik pewnie spyta: a którą teorię arytmetyczną tu przyjmujemy? Widać, że wystarczy wybrać teorię, w której występuje lub daje się zdefiniować owe pięć symboli: „ $\mathbf{Z}$ ”, „ $<$ ”, „ $>$ ”, „ $+$ ” (ale niekoniecznie „ $\mathbf{R}$ ”). Można zastosować całą arytmetykę liczb rzeczywistych, jak w następnym rozdziale, a można też znaleźć odpowiednie prostsze jej fragmenty.

jest słuszne jedynie w przypadku drugiej interpretacji, zaś w przypadku pierwszej zachodzi jego negacja:

nie dla każdej liczby x istnieje taka liczba y , że $x = y + y$.

Przy założeniu niesprzeczności arytmetyki z pierwszej interpretacji wyciągamy wniosek, że omawianego zdania nie da się dowieść na gruncie Systemu $\mathcal{A}$, z drugiej natomiast, że nie da się go obalić.

Tak więc pokazaliśmy, że istnieją dwa zdania sprzeczne, sformułowane wyłącznie za pomocą terminów logicznych oraz terminów pierwotnych rozważanej przez nas teorii matematycznej i takie, których nie da się wyprowadzić z aksjomatów tej teorii. W ten sposób dochodzimy do wniosku^{††}:

Teoria matematyczna oparta na Systemie $\mathcal{A}$ jest niezupełna.

Ćwiczenia

1. Umówmy się, że wzór:

$$x \otimes y$$

znaczy tyle co

$$x + 1 < y.$$

W aksjomatach Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ z § 57 symbol „<” zastąpić wszędzie przez „ $\otimes$ ”, określić, które aksjomaty zachowują słusność, a które – nie, i pokazać w ten sposób, że Aksjomat 1⁽²⁾ nie daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów. Jak nazywa się zastosowana tu metoda?

^{††}Ustaliwszy sprawy niesprzeczności i zupełności, przypomnijmy, że dla danej teorii dedukcyjnej istnieje jeszcze trzecie pokrewne zagadnienie, mianowicie zagadnienie rozstrzygalności (patrz § 41). Okazuje się, że teoria uporządkowanych grup abelowych jest rozstrzygalna. To znaczy, że istnieje algorytm pozwalający na określenie, czy dane zdanie daje się wyprowadzić z aksjomatów, czy nie. Taki algorytm musi koniecznie wykorzystać postać aksjomatów i twierdzeń, a zatem istotnym pierwszym krokiem w badaniu tego zagadnienia byłoby sformułowanie omawianej teorii jako teorii sformalizowanej. Dalej, algorytm ten stosuje się tylko, gdy teoria uważana jest za teorię elementarną (jak w ostatnich trzech rozdziałach), czyli należy unikać pojęć właściwych dla teorii zbiorów. W twierdzeniach wolno więc stosować jedynie: zmienne przybierające wartości ze zbioru $\mathbf{R}$, związane z nimi kwantyfikatory, symbole „<”, „+”, i „=”, spójniki zdaniowe oraz oczywiście nawiasy. (Por. także § 59 a w szczególności odsyłacz na str. 223.)

2. Wzorując się na dowodzie niezależności, naszkicowanym w § 56 dla Aksjomatu 2⁽¹⁾, pokazać, że Aksjomat 2⁽²⁾ nie daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$.

3. Niech symbol „ $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ ” oznacza zbiór, złożony z trzech liczb 0, 1 i 2. Dla elementów tego zbioru definiujemy relację $\overset{\circ}{<}$ i postanawiamy, że będzie ona zachodzić tylko w tych trzech przypadkach:

$$0 \overset{\circ}{<} 1, \quad 1 \overset{\circ}{<} 2, \quad 2 \overset{\circ}{<} 0.$$

Ponadto definiujemy działanie $\overset{\circ}{+}$ na elementach zbioru $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ za pomocą następujących wzorów:

$$0 \overset{\circ}{+} 0 = 1 \overset{\circ}{+} 2 = 2 \overset{\circ}{+} 1 = 0,$$

$$0 \overset{\circ}{+} 1 = 1 \overset{\circ}{+} 0 = 2 \overset{\circ}{+} 2 = 1,$$

$$0 \overset{\circ}{+} 2 = 1 \overset{\circ}{+} 1 = 2 \overset{\circ}{+} 0 = 2.$$

W aksjomatach Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ terminy pierwotne zastąpić odpowiednio przez „ $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ ”, „ $\overset{\circ}{<}$ ” i „ $\overset{\circ}{+}$ ” (i niech słowo „*liczba*” znaczy teraz „*jedna z trzech liczb 0, 1 i 2*”). Wykazać w ten sposób, że Aksjomat 3⁽²⁾ nie daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów.

4. Aby wykazać metodą dowodu przez interpretację, że Aksjomat 4⁽²⁾ nie daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$, wystarczy symbol dodawania we wszystkich aksjomatach zastąpić symbolem jednego z czterech działań wspomnianych w ćwiczeniu 3 rozdziału VIII. O które działanie tu chodzi?

5. Rozważyć działanie $\oplus$ spełniające następujący wzór:

$$x \oplus y = 2 \cdot (x + y).$$

Za pomocą tego działania wykazać, że Aksjomatu 5⁽²⁾ nie da się wydedukować z innych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$.

6. Skonstruować zbiór liczb takiego rodzaju, który by wraz z relacją $<$ i działaniem $+$ nie spełniał Aksjomatu 6⁽²⁾, lecz stanowił model pozostałych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$. Jaki można wyciągnąć stąd wniosek odnośnie wyprowadzalności Aksjomatu 6⁽²⁾?

7. Aby wykazać, że Aksjomat 7⁽²⁾ nie wynika z innych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$, dwa terminy pierwotne systemu zastąpimy (we

wszystkich aksjomatach) odpowiednimi symbolami, wprowadzonymi w ćwiczeniu 3, zaś trzeci termin pierwotny pozostawiamy bez zmiany. Określić ten termin.

8. Wyniki otrzymane w ćwiczeniach 1–7 pokazują, że żadnego aksjomatu Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ nie da się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów tego systemu. Przeprowadzić analogiczne dowody niezależności dla systemu aksjomatycznego $\mathcal{A}^{(1)}$ z § 55 oraz $\mathcal{A}^{(3)}$ z § 58 (wykorzystując częściowo interpretacje zastosowane w poprzednich ćwiczeniach).

9. Odwołując się do systemu aksjomatycznego $\mathcal{A}^{(2)}$ wykazać, że jeśli zbiór liczb jest grupą abelową ze względu na działanie dodawania, to jednocześnie jest on uporządkowaną grupą abelową ze względu na relację mniejszości i działanie dodawania. Podać przykłady takich zbiorów liczb.

10. W ćwiczeniu 5 rozdziału VIII wskazaliśmy kilka zbiorów liczb tworzących grupy abelowe ze względu na mnożenie. Które z tych zbiorów są uporządkowanymi grupami abelowymi ze względu na relację mniejszości i działanie mnożenia, a które – nie?

11. W oparciu o wnioski wyciągnięte w ćwiczeniu 10 skonstruować nowy dowód niezależności Aksjomatu 7⁽²⁾ od pozostałych aksjomatów Systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ (por. ćwiczenie 7).

***12.** Z systemu aksjomatycznego $\mathcal{A}^{(2)}$ wyprowadzić następujące twierdzenie:

Jeśli istnieją choć dwie różne liczby, to dla dowolnej liczby x istnieje taka liczba y , że $x < y$.

Uogólniając ten wynik udowodnić ogólne twierdzenie z teorii grup:

Jeśli klasa K jest uporządkowaną grupą abelową ze względu na relację R i działanie D i jeśli K składa się co najmniej z dwóch elementów, to dla każdego elementu x należącego do K istnieje taki element y klasy K , że xRy .

W oparciu o to prawo wykazać, że żadna klasa będąca uporządkowaną grupą abelową nie może zawierać dokładnie dwóch, trzech itd. elementów. A czy może zawierać tylko jeden element? (Por. ćwiczenie 8 w rozdziale VIII.)

***13.** Wykazać, że system Aksjomatów $1^{(2)}\text{--}3^{(2)}$ (z § 57) jest równoważny systemowi złożonemu z Aksjomatu $1^{(2)}$ i następującego zdania:

jeśli $x < y$, $y < z$, $z < t$, $t < u$, i $u < v$, to $v \not< x$.

Jako uogólnienie tego wyniku ustalić następujące ogólne prawo teorii relacji:

Aby klasa K była uporządkowana przez relację R , warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by R była spójna w K i spełniała następujący warunek:

jeśli x, y, z, t, u i v są dowolnymi elementami K i jeśli xRy, yRz, zRt, tRu i uRv , to nie zachodzi, że vRx .

***14.** W oparciu o rozważania w § 48, 55 i 58 wykazać, że następujące trzy systemy zdań są równoważne:

- (a) system Aksjomatów 6–9 z § 47;
- (b) system Aksjomatów $4^{(2)}\text{--}6^{(2)}$ z § 57;
- (c) system Aksjomatów $3^{(3)}$ i $4^{(3)}$ z § 58.

Uogólnić ten wynik formułując nowe definicje wyrażenia:

klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D ;

definicje te powinny być równoważne definicji podanej w § 47, lecz prostsze; zapisać odnośne aksjomaty za pomocą symboli (por. ćwiczenie *29 w rozdziale VIII).

***15.** Rozważyć System $\mathcal{A}^{(4)}$ złożony z następujących pięciu aksjomatów:

AKSJOMAT $1^{(4)}$. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

AKSJOMAT $2^{(4)}$. *Jeśli $x < y$, $y < z$, $z < t$, $t < u$ i $u < v$, to $v \not< x$.*

AKSJOMAT $3^{(4)}$. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

AKSJOMAT $4^{(4)}$. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 5⁽⁴⁾. *Jeśli $y < z$, to $x + y < x + z$.*

Wykorzystać wyniki z ćwiczenia *13 i *14, aby wykazać, że System $\mathcal{A}^{(4)}$ jest równoważny każdemu z Systemów $\mathcal{A}^{(2)}$ i $\mathcal{A}^{(3)}$.

16. W § 58 stwierdziliśmy, że system trzech terminów pierwotnych „R”, „<” i „+” jest równoważny systemowi terminów pierwotnych „R”, „≤” i „+”; do tego stwierdzenia powinniśmy byli dodać, że systemy te są równoważne ze względu na pewien system zdań, na przykład, ze względu na System $\mathcal{A}^{(3)}$ z § 58 i Definicję 1 z § 46. Wyjaśnić dlaczego uzupełnienie takie jest niezbędne. Ogólnie rzecz biorąc, dlaczego do stwierdzenia równoważności dwóch systemów terminów (w sensie § 39), musimy zawsze przyjąć określony system zdań?

***17.** Rozważyć System $\mathcal{A}^{(5)}$ złożony z następujących siedmiu zdań:

AKSJOMAT 1⁽⁵⁾. *Dla dowolnych liczb x i y mamy: $x \leq y$
lub $y \leq x$.*

AKSJOMAT 2⁽⁵⁾. *Jeśli $x \leq y$, i $y \leq x$, to $x = y$.*

AKSJOMAT 3⁽⁵⁾. *Jeśli $x \leq y$, i $y \leq z$, to $x \leq z$.*

AKSJOMAT 4⁽⁵⁾. $x + y = y + x$.

AKSJOMAT 5⁽⁵⁾. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

AKSJOMAT 6⁽⁵⁾. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 7⁽⁵⁾. *Jeśli $y \leq z$, to $x + y \leq x + z$.*

Wykazać, że aksjomaty systemu $\mathcal{A}^{(2)}$ (z § 57) i $\mathcal{A}^{(5)}$ stają się równoważnymi systemami zdań, jeśli do pierwszego z nich dodamy Definicję 1 z § 46, a do drugiego – Twierdzenie 8 z § 46, traktując je jako definicję symbolu „<”. Dlaczego nie wolno nam powiedzieć po prostu, że Systemy $\mathcal{A}^{(2)}$ i $\mathcal{A}^{(5)}$ są równoważne?

18. Wzorując się na rozumowaniu z § 60, wykazać, że na gruncie Systemu $\mathcal{A}$ nie da się ani udowodnić, ani obalić następującego zdania:

jeśli $x < z$, to istnieje taka liczba y , że $x < y$ i $y < z$.

***19.** Wykazać, że w oparciu o System $\mathcal{A}$ nie da się ani udowodnić, ani obalić następującego zdania:

$$\forall x \exists y, z [(y < x) \wedge (x < z)].$$

***20.** W niniejszym rozdziale stosowaliśmy metodę dowodu przez interpretację w celu ustalenia niezależności lub niezupełności danego systemu aksjomatycznego. Metodę tę można także stosować w badaniach niesprzeczności. Rzeczywiście, dysponujemy następującym prawem metodologicznym, które wyraża wniosek z prawa dedukcji:

Jeśli teoria dedukcyjna $\mathcal{S}$ posiada interpretację w teorii dedukcyjnej $\mathcal{T}$, a teoria $\mathcal{T}$ jest niesprzeczna, to teoria $\mathcal{S}$ jest również niesprzeczna.

Uzasadnić to stwierdzenie. W §38 sformułowaliśmy uwagi dotyczące pewnych interpretacji arytmetyki i geometrii; stosując podane prawo, wyprowadzić z tych uwag odpowiednie wnioski odnośnie niesprzeczności obu tych nauk i jej związku z niesprzecznością logiki.[†]

[†]Czytelnik powinien pamiętać, że w tych interpretacjach podstawową rolę odgrywa teoria zbiorów. Powinien również przypomnieć sobie, co mówiliśmy w §41 na temat dowodów niesprzeczności i zrozumieć, że takie interpretacje dopuszczają tylko ograniczone wnioski odnośnie niesprzeczności teorii. (W takich okolicznościach używa się terminu NIESPRZECZNOŚĆ WZGLĘDNA).

X

Rozszerzenie skonstruowanej teorii: podstawy arytmetyki liczb rzeczywistych

§61 Pierwszy system aksjomatyczny dla arytmetyki liczb rzeczywistych

System aksjomatyczny $\mathcal{A}$ nie stanowi odpowiedniej podstawy dla całej arytmetyki liczb rzeczywistych z tego względu, że – jak wiemy z § 60 – liczne twierdzenia arytmetyki nie dają się wyprowadzić z aksjomatów tego systemu, jak również z innego, analogicznego i nie mniej ważnego powodu, mianowicie, że wielu pojęć arytmetycznych nie da się zdefiniować tylko za pomocą terminów pierwotnych występujących w Systemie $\mathcal{A}$. W oparciu o nie nigdy nie zdołamy zdefiniować, na przykład, symboli mnożenia lub dzielenia, czy też takich symboli jak „1”, „2” itd.

Naturalnie, nasuwa się następujące pytanie: w jaki sposób przekształcić lub uzupełnić nasz system aksjomatów i terminów pierwotnych, aby uzyskać wystarczającą podstawę dla skonstruowania całej arytmetyki liczb rzeczywistych? Zagadnienie to daje się rozwiązać w różny sposób. Naszkicujemy tutaj dwie całkiem odmienne metody.¹

¹Pierwszy system aksjomatyczny dla całej arytmetyki liczb rzeczywistych opublikował HILBERT w 1900 roku. System ten jest zbliżony do Systemu $\mathcal{A}''$, z którym się wkrótce zapoznamy. Przed 1900 r. znano systemy aksjomatyczne dla pewnych wązszych działów arytmetyki; jeden z takich systemów – dla arytmetyki liczb naturalnych – podał w 1889 r. PEANO (por. ods. 2 na str. 125). Kilka systemów

* * *

W przypadku pierwszej metody za punkt wyjścia obieramy System $\mathcal{A}^{(3)}$ (por. § 58), przy czym do terminów pierwotnych występujących w tym systemie dodamy słowo „*jeden*”, zastępując go jak zwykle symbolem „1”, zaś sam układ uzupełnimy czterema nowymi aksjomatami. W ten sposób otrzymamy nowy SYSTEM $\mathcal{A}'$, zawierający cztery terminy pierwotne „**R**”, „ $<$ ”, „ $+$ ” i „1”, złożony z dziewięciu aksjomatów, które wypiszemy tu explicite:

AKSJOMAT 1'. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

AKSJOMAT 2'. *Jeśli $x < y$, to $y \not< x$.*

AKSJOMAT 3'. *Jeśli $x < z$, to istnieje taka liczba y , że $x < y$ i $y < z$.*

AKSJOMAT 4'. *Jeśli S i T są dowolnymi zbiorami liczb (to znaczy: $S \subseteq \mathbf{R}$ i $T \subseteq \mathbf{R}$) spełniającymi warunek:*

dla dowolnego x należącego do S i dowolnego y należącego do T : $x < y$,

to istnieje liczba z czyniąca zadość następującemu warunkowi:

jeśli x jest dowolnym elementem S , zaś y jest dowolnym elementem T i jeśli $x \neq z$ i $y \neq z$, to $x < z$ i $z < y$.

AKSJOMAT 5'. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

AKSJOMAT 6'. *Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.*

AKSJOMAT 7'. *Jeśli $x + z < y + t$, to $x < y$ lub $z < t$.*

AKSJOMAT 8'. $1 \in \mathbf{R}$.

AKSJOMAT 9'. $1 < 1 + 1$.

aksjomatycznych dla arytmetyki i jej rozmaitych działów, w tym pierwszy system aksjomatyczny dla arytmetyki liczb zespolonych, sformułował amerykański matematyk E. V. HUNTINGTON (1874–1952); dokonał on ważnego wkładu do aksjomatycznych podstaw teorii logicznych i matematycznych.

§62 Bliższa charakterystyka pierwszego systemu aksjomatycznego; jego metodologiczne zalety i dydaktyczne braki

Aksjomaty podane w poprzednim paragrafie dzielą się na trzy grupy. W pierwszej, złożonej z Aksjomatów 1'–4', występują tylko dwa terminy pierwotne „**R**” i „<”; w drugiej, do której należą Aksjomaty 5'–7', mamy ponadto symbol „+”; wreszcie w trzeciej grupie, zawierającej Aksjomaty 8' i 9', pojawia się nowy symbol „1”.

Wśród aksjomatów pierwszej grupy dwa nie były nam dotąd znane, mianowicie Aksjomat 3' i 4'. Aksjomat 3' nazywamy PRAWEM GĘSTOŚCI dla relacji mniejszości. Prawo to wyraża fakt, że relacja mniejszości jest gęsta w zbiorze wszystkich liczb. Ogólnie, relacja R jest GĘSTA w KLASIE K , jeśli dla dowolnych dwóch liczb x i y tej klasy wzór:

$$xRy$$

zawsze pociąga za sobą istnienie elementu z klasy K , dla którego zachodzi:

$$xRz \text{ i } zRy.$$

Aksjomat 4' znany jest jako PRAWO CIĄGŁOŚCI dla relacji mniejszości, AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI lub AKSJOMAT DEDEKINDA². Aby ustalić ogólny warunek CIĄGŁOŚCI w KLASIE K dla relacji R , wystarczy zastąpić wszędzie w Aksjomacie 4' „**R**” przez „ K ” (i, co za tym idzie, wyraz „*liczba*” wyrażeniem „*element klasy K*”) oraz „<” przez „ R ”. Jeśli, w szczególności, klasa K jest uporządkowana przez relację R , a ponadto R jest gęsta w K lub ciągła w K , to mówimy, że klasa K jest, odpowiednio, UPORZĄDKOWANA W SPOSÓB GĘSTY lub UPO-
RZĄDKOWANA W SPOSÓB CIĄGŁY.

Aksjomat 4' intuicyjnie jest mniej oczywisty i bardziej złożony od pozostałych aksjomatów; różni się od nich już choćby tym, że odnosi się nie do indywidualnych liczb, lecz do zbiorów liczb. Aby nadać mu bardziej przejrzystą i przystępną postać, dogodnie jest przyjąć przed jego sformulowaniem następujące definicje:

Mówimy, że zbiór liczb S POPRZEDZA zbiór liczb T wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba należąca do S jest mniejsza od każdej liczby należącej do T.

²Aksjomat ten – w nieco bardziej skomplikowanym brzmieniu – sformułował niemiecki matematyk R. DEDEKIND (1831–1916), którego badania przyczyniły się znacznie do ugruntowania arytmetyki, a zwłaszcza teorii liczb niewymiernych.

Mówimy, że liczba z ODDZIELA zbiór liczb S od zbioru T wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch elementów – x ze zbioru S i y ze zbioru T – różnych od z , $x < z$ i $z < y$.

Opierając się na tych definicjach możemy aksjomatowi ciągłości nadać bardzo prostą postać:

Jeśli jeden zbiór liczb poprzedza drugi, to istnieje co najmniej jedna liczba oddzielająca pierwszy zbiór od drugiego.

Wszystkie aksjomaty drugiej grupy są nam znane z wcześniejszych rozważań. Aksjomaty z trzeciej grupy, choć nowe, mają taką prostą i oczywistą treść, że nie wymagają prawie żadnego komentarza. Co najwyżej zauważymy, że gdybyśmy Aksjomat 9' poprzedzili definicjami symbolu „0” i wyrażenia „liczba dodatnia”, moglibyśmy zastąpić go albo wzorem:

$$0 < 1$$

albo zdaniem:

1 jest liczbą dodatnią.

Zauważmy teraz, że Aksjomaty 1', 2', 5', 6' i 7' tworzą układ, który nazwaliśmy Systemem $\mathcal{A}^{(3)}$, a który – podobnie jak równoważny mu System $\mathcal{A}^{(2)}$ – charakteryzuje zbiór wszystkich liczb jako uporządkowaną grupę abelową (por. § 57). Biorąc pod uwagę treść właśnie przyłączonych aksjomatów 3', 4', 8' i 9', cały system możemy opisać następująco:

System $\mathcal{A}'$ wyraża fakt, że zbiór wszystkich liczb stanowi uporządkowaną w sposób gęsty i ciągły grupę abelową ze względu na relację mniejszości i działanie dodawania oraz wyróżnia w tym zbiorze pewien element dodatni 1.

* * *

Z metodologicznego punktu widzenia system $\mathcal{A}'$ posiada wiele zalet. Formalnie rzecz biorąc, wydaje się on najprostszy ze wszystkich znanych systemów aksjomatycznych, na których można oprzeć teorię całej arytmetyki. Pominąwszy Aksjomat 1', który – choć nie bardzo łatwo – daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów, wszystkie

inne aksjomaty tego systemu, jak również występujące w nich terminy pierwotne, są wzajemnie niezależne. Natomiast wartość dydaktyczna Systemu $\mathcal{A}'$ i jego intuicyjność są bez porównania mniejsze, bowiem prostota podstawowych założeń pociąga za sobą znaczne komplikacje w dalszych wywodach. Nawet definicja mnożenia i wyprowadzenie podstawowych praw dla tego działania nie należy do łatwych zadań. Niemal od początku rozważania wymagają aksjomatu ciągłości, zaś oparte na nim dowody nastroczają początkującym znaczne trudności (na przykład bez jego pomocy nie da się udowodnić istnienia liczby $\frac{1}{2}$, czyli takiej liczby y , że $y + y = 1$).

§63 Drugi system aksjomatyczny dla arytmetyki liczb rzeczywistych

Z wyłuszczonych przed chwilą względów warto poszukać innego systemu aksjomatów, na którym można by oprzeć konstrukcję arytmetyki. System taki możemy otrzymać w następujący sposób. Za punkt wyjścia obieramy System $\mathcal{A}^{(2)}$. Przyjmujemy trzy dodatkowe terminy pierwotne: „zero”, „jeden” oraz „iloczyn”; pierwsze dwa, jak zwykle, zastąpimy symbolami „0” i „1”, a zamiast wyrażenia „iloczyn liczb (lub czynników) x i y ” (i zamiast „wynik mnożenia x i y ”) będziemy się posługiwać zwykłym zapisem „ $x \cdot y$ ”. System nasz ponadto rozszerzymy o trzynaście nowych aksjomatów; dwa z nich – aksjomat ciągłości i prawo wykonalności dla dodawania – są już nam znane. W ten sposób dochodzimy do SYSTEMU $\mathcal{A}''$, złożonego z sześciu terminów pierwotnych „ $\mathbf{R}$ ”, „ $<$ ”, „ $+$ ”, „0”, „1” i „ $\cdot$ ” oraz następujących dwudziestu zdań:

AKSJOMAT 1''. *Jeśli $x \neq y$, to $x < y$ lub $y < x$.*

AKSJOMAT 2''. *Jeśli $x < y$, to $y \not< x$.*

AKSJOMAT 3''. *Jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.*

AKSJOMAT 4''. *Jeśli S i T są dowolnymi zbiorami liczb spełniającymi warunek:*

dla dowolnego x należącego do S i dowolnego y należącego do T , zachodzi: $x < y$,

to istnieje liczba z , dla której spełniony jest następujący warunek:

jeśli x jest dowolnym elementem S , zaś y – dowolnym elementem T i jeśli $x \neq z$ i $y \neq z$, to $x < z$ i $z < y$.

- AKSJOMAT 5''. Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $z = x + y$ (inaczej mówiąc: jeśli $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$, to $x + y \in \mathbf{R}$).
- AKSJOMAT 6''. $x + y = y + x$.
- AKSJOMAT 7''. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- AKSJOMAT 8''. Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $x = y + z$.
- AKSJOMAT 9''. Jeśli $y < z$, to $x + y < x + z$.
- AKSJOMAT 10''. $0 \in \mathbf{R}$.
- AKSJOMAT 11''. $x + 0 = x$.
- AKSJOMAT 12''. Dla dowolnych liczb x i y istnieje taka liczba z , że $z = x \cdot y$ (inaczej mówiąc: jeśli $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$, to $x \cdot y \in \mathbf{R}$).
- AKSJOMAT 13''. $x \cdot y = y \cdot x$.
- AKSJOMAT 14''. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- AKSJOMAT 15''. Dla dowolnych liczb x i y , jeśli $y \neq 0$, to istnieje taka liczba z , że $x = y \cdot z$.
- AKSJOMAT 16''. Jeśli $0 < x$ i $y < z$, to $x \cdot y < x \cdot z$.
- AKSJOMAT 17''. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- AKSJOMAT 18''. $1 \in \mathbf{R}$.
- AKSJOMAT 19''. $x \cdot 1 = x$.
- AKSJOMAT 20''. $0 \neq 1$.

§64 Bliższa charakterystyka drugiego systemu aksjomatycznego; pojęcie ciała liczb i ciała uporządkowanego liczb

W Systemie $\mathcal{A}''$, podobnie jak w Systemie $\mathcal{A}'$, możemy wyróżnić trzy grupy aksjomatów. W Aksjomatach 1'' – 4'', tworzących pierwszą grupę, występują tylko dwa terminy pierwotne „ $\mathbf{R}$ ” i „ $<$ ”; druga grupa, złożona z Aksjomatów 5'' – 11'', zawiera dwa nowe symbole: znak dodawania „ $+$ ” oraz symbol „ 0 ”; wreszcie w trzeciej grupie, utworzonej z Aksjomatów 12'' – 20'', ważną rolę odgrywają znak mnożenia „ $\cdot$ ” i symbol „ 1 ”.

Wszystkie aksjomaty pierwszych dwóch grup poza Aksjomatami 10'' i 11'' są nam już znane. Razem Aksjomaty 10'' i 11'' ustalają, że 0 jest (prawostronnym) modulem działania dodawania. Ogólnie, o danym elemencie m mówimy, że jest PRAWOSTRONNYM lub LEWOSTRONNYM MODULEM DZIAŁANIA D W KLASIE K , jeśli m należy do K i jeśli każdy element x z K spełnia odpowiedni wzór:

$$xDm = x \text{ lub } mDx = x.$$

Gdy m jest jednocześnie prawo- i lewostronnym modulem, nazywamy go po prostu MODULEM DZIAŁANIA D W KLASIE K ; oczywiście, w przypadku działania D przemienne go każdy prawo- lub lewostronny moduł jest także modulem.

* * *

W pierwszych trzech aksjomatach trzeciej grupy, czyli Aksjomatach 12''–14'', rozpoznajemy PRAWO WYKONALNOŚCI, PRAWO PRZEMIENNOŚCI oraz PRAWO ŁĄCZNOŚCI dla mnożenia; są one dokładnymi odpowiednikami Aksjomatów 5''–7''. Aksjomaty 15'' i 16'' nazywamy, odpowiednio, PRAWEM ODWRACALNOŚCI PRAWOSTRONNEJ dla mnożenia i PRAWEM MONOTONICZNOŚCI dla mnożenia względem relacji mniejszości. Do pewnego stopnia aksjomaty te odpowiadają prawom odwracalności i monotoniczności dla dodawania. Ich założenia zawierają jednak ograniczające warunki „ $y \neq 0$ ” i „ $0 < x$ ” i bez względu na nazwy, które noszą, nie możemy na ich podstawie po prostu powiedzieć, że mnożenie jest odwracalne lub, że jest monotoniczne względem relacji mniejszości (w sensie podanym w §§ 47 i 49).

Aksjomat 17'' ustala podstawowy związek między dodawaniem a mnożeniem; jest to tzw. PRAWO ROZDZIELNOŚCI (dokładnie mówiąc, PRAWO ROZDZIELNOŚCI PRAWOSTRONNEJ) dla mnożenia względem dodawania. Ogólnie, o działaniu C mówimy, że jest PRAWO- lub LEWOSTRONNIE ROZDZIELNE WZGLĘDEM DZIAŁANIA D W KLASIE K , jeśli dowolne trzy elementy x , y i z tej klasy spełniają odpowiednio wzór:

$$xM(yDz) = (xMy)D(xMz)$$

$$\text{lub } (xDy)Mz = (xMz)D(yMz).$$

Jeśli działanie C jest przemienne, to pojęcia prawo- i lewostronnej rozdzielności pokrywają się i mówimy po prostu, że działanie C jest ROZDZIELNE WZGLĘDEM DZIAŁANIA D W KLASIE K .

Ostatnie trzy aksjomaty dotyczą liczby 1. Aksjomaty 18'' i 19'' wyrażają razem, że 1 jest prawostronnym modulem działania mnożenia. Treść Aksjomatu 20'' nie wymaga żadnych wyjaśnień; jego rola przy konstruowaniu arytmetyki jest większa, niż można by w pierwszej chwili przypuszczać, bowiem bez jego pomocy nie można by wykazać, że zbiór wszystkich liczb jest nieskończony.

* * *

Zespół własności, przypisanych dodawaniu i mnożeniu w Aksjomatach 5''–8'', 12''–15'' i 17'', ujmujemy krótko, mówiąc, że aksjomaty te charakteryzują zbiór $\mathbf{R}$ jako CIAŁO (lub, dokładniej, jako CIAŁO PRZEMIENNE) ZE WZGLĘDU NA DZIAŁANIE DODAWANIA I MNOŻENIA. Jeśli ponadto weźmiemy pod uwagę aksjomaty uporządkowania 1''–3'' oraz aksjomaty monotoniczności 9'' i 16'', to powiemy, że zbiór $\mathbf{R}$ jest CIAŁEM LICZBOWYM UPORZĄDKOWANYM ZE WZGLĘDU NA RELACJĘ MNIEJSZOŚCI ORAZ DZIAŁANIA DODAWANIA I MNOŻENIA. Czytelnik z łatwością się domysli, jak pojęciem ciała, czy też ciała uporządkowanego objąć dowolne klasy, działania i relacje. – Jeśli na koniec weźmiemy pod uwagę aksjomat ciągłości 4'' i aksjomaty dotyczące liczb 0 i 1 (Aksjomaty 10'', 11'', 18''–20''), to treść całego systemu aksjomatycznego $\mathcal{A}''$ możemy scharakteryzować następująco:

System $\mathcal{A}''$ wyraża, że zbiór wszystkich liczb jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły ze względu na relację mniejszości oraz działania dodawania i mnożenia, a przy tym wyszczególnia w tym zbiorze dwa różne elementy 0 i 1, z których pierwszy jest modulem dodawania, drugi zaś – modulem mnożenia.

§65 Równoważność obu systemów aksjomatycznych; metodologiczne braki i dydaktyczne zalety drugiego systemu

Systemy aksjomatyczne $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}''$ są równoważne (a raczej stają się równoważne z chwilą, gdy pierwszy system uzupełnimy o sformułowane za pomocą terminów pierwotnych definicje symbolu „0” i znaku mnożenia „·”). Dowód równoważności nie jest jednak łatwy. To prawda, że wyprowadzenie aksjomatów pierwszego systemu z aksjomatów drugiego nie sprawia większych kłopotów, ale gdy w grę wchodzi zadanie odwrotne, to – jak już powiedzieliśmy – zarówno sformułowanie definicji mnożenia, jak uzasadnienie podstawowych praw rządzących tym działaniem, sprawia znaczne trudności (tymczasem prawa te występują jako aksjomaty w drugim systemie).

Pod względem metodologicznym System $\mathcal{A}''$ zdecydowanie ustępuje Systemowi $\mathcal{A}'$. Liczba aksjomatów w $\mathcal{A}''$ jest przeszło dwukrotnie

większa. Aksjomaty te nie są wzajemnie niezależne; na przykład Aksjomaty 5'' i 12'', czyli prawa wykonalności dla dodawania i mnożenia, dają się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów, lub – jeśli aksjomaty te chcemy zachować – możemy pominąć kilka innych, na przykład 6'', 11'' i 14''. Nie są też wzajemnie niezależne terminy pierwotne, bowiem trzy z nich, mianowicie „<”, „0” i „1”, dają się zdefiniować za pomocą pozostałych terminów (*jedną możliwość definicji symbolu „0” podaliśmy w § 53*); zatem liczbę aksjomatów można jeszcze zmniejszyć.

Widzimy więc, że System $\mathcal{A}''$ dopuszcza różne ważne ułatwienia, bez których jego zalety dydaktyczne (jak i walor intuicyjności) musiałyby znacznie zmaleć.[†] A zalety te są rzeczywiście wielkie. Na podstawie Systemu $\mathcal{A}''$ można bez trudu rozwinąć najważniejsze działy arytmetyki liczb rzeczywistych – teorię podstawowych relacji między liczbami, teorię czterech znanych działań arytmetycznych, czyli dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, teorię liniowych równań, nierówności i funkcji. Potrzebne do tego celu metody dowodzenia charakteryzują się naturalnością i zupełnie elementarnym stopniem trudności; zwłaszcza, że na tym etapie nie występuje aksjomat ciągłości, który odgrywa istotną rolę dopiero, kiedy przechodzimy do „wyższych” działań arytmetycznych, a więc podnoszenia do potęgi, wyciągania pierwiastków, logarytmowania i kiedy jest on niezbędny dla dowodu istnienia liczb niewymiernych. Nie znamy żadnego innego systemu aksjomatów i terminów pierwotnych, który stanowiłby dogodniejszą podstawę dla elementarnej i jednocześnie ściśle dedukcyjnej konstrukcji arytmetyki liczb rzeczywistych.

Ćwiczenia

1. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb dodatnich, relacja mniejszości, działanie mnożenia i liczba 2 tworzą model Systemu $\mathcal{A}'$ i że wobec tego system ten posiada co najmniej dwie różne interpretacje w arytmetyce.

[†]Pamiętamy, że Autor kilkakrotnie odwoływał się do tego obszaru pojęć, które możemy opisać słowami i zwrotami takimi jak „poglądowy”, „dydaktyczny” (lub „pedagogiczny”), „przemawiający do intuicji”, „heurystyczny”, nawet „estetyczny”. (Patrz zwłaszcza rozważania w § 39 odnośnie wyboru systemu aksjomatycznego, a także § § 55, 57 i 62.) Dążenie do poglądowości faktycznie było dla Autora zawsze ważną częścią badań naukowych.

2. Które spośród relacji wymienionych w ćwiczeniu 6 z rozdziału V są gęste?

***3.** Jak możemy wyrazić – za pomocą symboli algebry relacji – fakt, że dana relacja R jest gęsta (w klasie pełnej)? Jak za pomocą jednego równania z algebry relacji możemy wyrazić fakt, że pewna relacja S jest zarazem przechodnia i gęsta? (Por. ćwiczenie *17 z rozdziału V.)

4. Określić które z następujących zbiorów liczb są uporządkowane w sposób gęsty ze względu na relację mniejszości:

- (a) zbiór wszystkich liczb naturalnych,
- (b) zbiór wszystkich liczb całkowitych,
- (c) zbiór wszystkich liczb wymiernych,
- (d) zbiór wszystkich liczb dodatnich,
- (e) zbiór wszystkich liczb różnych od 0.

***5.** Aby udowodnić na podstawie Systemu $\mathcal{A}'$ istnienie liczby $\frac{1}{2}$, czyli takiej liczby z , że:

$$z + z = 1,$$

rozumujemy, jak następuje. Niech K będzie zbiorem wszystkich takich liczb x , że:

$$x + x < 1,$$

zaś L niech będzie zbiorem wszystkich takich liczb y , że:

$$1 < y + y.$$

Najpierw wykazujemy, że zbiór K poprzedza zbiór L , a po zastosowaniu aksjomatu ciągłości, otrzymujemy liczbę z , która oddziela zbiór K od zbioru L . Następnie możemy pokazać, że liczba z nie należy ani do K (w przeciwnym razie w K istniałaby liczba x większa od z), ani do L . Stąd wnosimy, że z jest szukaną liczbą, inaczej mówiąc, że zachodzi

$$z + z = 1.$$

– Dokładnie przeprowadzić naszkicowany dowód.

***6.** Uogólniając rozumowanie z poprzedniego ćwiczenia, na podstawie Systemu $\mathcal{A}'$ udowodnić Twierdzenie T:

T. *Dla dowolnej liczby x istnieje taka liczba y , że*

$$x = y + y.$$

Porównać otrzymany w ten sposób wynik z wywodami w § 60.

***7.** Zastąpmy w Systemie $\mathcal{A}'$ Aksjomat 3' Twierdzeniem T z poprzedniego ćwiczenia. Wykazać, że otrzymany układ zdań jest równoważny Systemowi $\mathcal{A}'$.

Wskazówka. Aby wyprowadzić Aksjomat 3' ze zmodyfikowanego systemu, podstawić w T „ $x + z$ ” za „ x ”; w oparciu o założenie Aksjomatu 3' można łatwo wykazać, że otrzymana liczba y świadczy o słuszności tezy tego aksjomatu.

***8.** Stosując metodę dowodu przez interpretację wykazać, że jeśli pominiemy Aksjomat 1', to System $\mathcal{A}'$ stanie się systemem aksjomatów wzajemnie niezależnych.

***9.** Rozszerzając ćwiczenie 2 z rozdziału VIII podać interpretację geometryczną systemów aksjomatycznych $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}''$.

***10.** Zapisać wszystkie aksjomaty Systemów $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}''$ za pomocą symboli logicznych.

11. Czy odejmowanie i dzielenie oraz działania wymienione w ćwiczeniu 3 z rozdziału VIII w zbiorze wszystkich liczb posiadają prawolub lewo- lub obustronne moduły? Czy dodawanie i mnożenie zbiorów punktów posiada moduły w klasie wszystkich zbiorów punktów?

***12.** Wykazać, że każde działanie przemienne w pewnej klasie posiada w tej klasie co najwyżej jeden moduł. Następnie uogólniając wynik z ćwiczenia *24 w rozdziale VIII, udowodnić następujące teoriogrupowe twierdzenie:

Jeśli klasa K jest grupą abelową ze względu na działanie D , to działanie to posiada w klasie K dokładnie jeden moduł.

13. Rozważamy pięć działań arytmetycznych: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie. Sformułować zdania, stwierdzające, że jedno z tych działań jest prawostronnie rozdzielne i zdania stwierdzające, że jest ono lewostronnie rozdzielne względem innego działania (zdań tych będzie ogółem 40). Określić, które z nich są prawdziwe.

14. Wykonać poprzednie ćwiczenie dla czterech działań A , B , W i M wprowadzonych w ćwiczeniu 3 z rozdziału VIII. Ponadto wykazać, że jeśli dane działanie jest wykonalne w pewnym zbiorze liczb, to jest ono prawo- i lewostronnie rozdzielne w tym zbiorze względem działań A i B .

15. Czy dodawanie klas jest rozdzielne względem mnożenia i odwrotnie? (Por. ćwiczenie 13 z rozdziału IV.)

16. Które spośród zbiorów liczb wymienionych w ćwiczeniu 4 są ciałami ze względu na dodawanie i mnożenie, lub ciałami uporządkowanymi ze względu na te działania i relację $<$?

17. Wykazać, że zbiór złożony z liczb 0 i 1 jest ciałem ze względu na zdefiniowane w ćwiczeniu 6 w rozdziale VIII działania $\oplus$ i mnożenie.

18. Znaleźć dwa takie działania na liczbach 0, 1 i 2, by zbiór tych trzech liczb tworzył ciało ze względu na owe działania.

19. Jak można zdefiniować symbol „1” za pomocą znaku mnożenia?

20. Z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}''$ możemy wyprowadzić następujące twierdzenie:

$$\forall_x [0 < x \rightarrow \exists_y (x = y \cdot y)].$$

Przyjmując, że twierdzenie to zostało już udowodnione, wyprowadzić z niego i z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}''$ następujące twierdzenie:

$$\forall_{x,y} [x < y \leftrightarrow (x \neq y \wedge \exists_z [x + (z \cdot z) = y])].$$

Czy to drugie twierdzenie uzasadnia pewną uwagę wyrażoną w § 65 odnośnie możliwości redukcji liczby terminów pierwotnych w Systemie $\mathcal{A}''$?

***21.** Udowodnić Twierdzenie T z ćwiczenia *6 na podstawie Systemu $\mathcal{A}''$. Porównać ten dowód z dowodem proponowanym w ćwiczeniu *6 odnośnie Systemu $\mathcal{A}'$; który z tych dowodów jest trudniejszy i wymaga lepszej znajomości pojęć logicznych?

Wskazówka. Do wyprowadzenia Twierdzenia T z Systemu $\mathcal{A}''$ zastosować Aksjomat 15'', zastępując w nim „ y ” i „ z ” odpowiednio przez „ $1+1$ ” i „ y ” (ale najpierw trzeba wykazać, że $1+1$ jest różne od 0); w ten sposób otrzymuje się liczbę y i za pomocą Aksjomatów 13'', 17'' i 19'' można wykazać, że spełnia ona wzór dany w Twierdzeniu T.

***22.** Z aksjomatów Systemu $\mathcal{A}''$ wyprowadzić wszystkie aksjomaty Systemu $\mathcal{A}'$.

Wskazówka. Aby wyprowadzić Aksjomat $3'$, przyjąć Twierdzenie T z ćwiczenia *6, które można udowodnić na podstawie Systemu $\mathcal{A}''$ (por. poprzednie ćwiczenie); dalej rozumować w taki sam sposób jak w ćwiczeniu *7.

Posłowie wydawcy przekładu

Logika a dzielność umysłu

Stulecie Szkoły Lwowsko-Warszawskiej obchodzone w roku 1995 to wyborna sposobność do wydania książki tak wybitnego jej przedstawiciela, jakim był Alfred Tarski — książki, która okazała się być bestsellerem logicznym XX wieku, jeśli mierzyć rzecz liczbą wydań i przekładów. Karierę swą rozpoczęła od wydania polskiego, mającego charakter niewielkiej książki popularno-naukowej pt. *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej* (1936), ale już w pierwszym wydaniu amerykańskim rozrosła się objętościowo i tematycznie do rozmiarów podręcznika akademickiego. Toteż jej przywrócenie czytelnikowi polskiemu musiało się dokonać w formie przekładu. Następne dwa wydania amerykańskie były poszerzane i ulepszone przez samego Autora, czwarte zaś, z roku 1994, zawiera wkład redakcyjny jego syna Jana Tarskiego.

Chociaż wzniesienie rocznicowego pomnika jest samo w sobie dobrym powodem obecnej edycji, nie mniej ważna jest jej dzisiejsza przydatność dla nauczania logiki, a także dla badań nad umysłem, zwłaszcza nad tą jego cechą, którą dawniej określano jako *dzielność umysłu*. Dziś nazywamy to raczej *inteligencją*.¹

* * *

Studentom filozofii wykłada się logikę po to, by mieli pełnię wiedzy filozoficznej. Przyszłym matematykom – dlatego, że jest ona działem matematyki. Do czego jednak służy wykład logiki na innych kierunkach uniwersyteckich? Czy prawnik stanie się dzięki niemu lepszym prawnikiem, a lekarz lepszym lekarzem? Odpowiedź jest twierdząca. Istotnie, stanie się lepszym – o tyle, o ile w wykonywaniu jego zawodu liczy się inteligencja.

Warunkiem nieodzownym inteligencji jest racjonalny krytycyzm. Do niego zaś prowadzi studium logiki. Tą intencją kierował się Autor

¹Zwrotu „dzielność umysłu” zwykł był używać Tadeusz Kotarbiński, którego Alfred Tarski zaliczał z respektem do swych nauczycieli; upowszechniał go też inny wybitny przedstawiciel tejże Szkoły, Władysław Witwicki w swoich przekładach dialogów Platona.

Wprowadzenia do logiki, który w Przedmowie do wydania amerykańskiego 1941 pisał, co następuje (przekład W.M.).

Byłbym bardzo szczęśliwy, gdyby ta książka przyczyniła się do rozposzechnienia wiedzy logicznej. Logika przez doskonalenie i wyostrzenie narzędzi myśli czyni ludzi bardziej krytycznymi, dzięki czemu stają się odporniejsi na atakujące ich dziś zewsząd pseudorozumowania.

Dodajmy, pseudorozumowania także własne, gdy je umiemy samokrytycznie ujawniać oraz naprawiać przy pomocy analizy logicznej.

Krytycyzm logiczny ma swój teoretyczny fundament w pojęciu DOWODU SFORMALIZOWANEGO. Stanowi ono główny temat *Wprowadzenia*. Jego doniosłość zasadza się na tym, że dostarcza ono wzorca precyzji rozumowania oraz metody konstruowania teorii (por. odc. 40). Nie wszystkie rozumowania mogą się odznaczać tego rodzaju precyzją. Są takie, na których wolno polegać, choć odbiegają od tego wzorca, ale dzięki jego istnieniu mamy świadomość czy to rozmiarów dystansu czy też odmienności gatunku rozumowania, gatunku nie mieszczącego się w kategorii dowodów sformalizowanych.

Inteligencja czyli dzielność umysłu nie wyczerpuje się bynajmniej w działalności krytycznej. Tak jak Eros, z którego Platon uczynił w *Uczcie* symbol tej dzielności, rodzi się ona z Obfitości i z Braku. Jest w niej Obfitość, a więc moc umysłu, inwencja, której zawdzięczamy twórcze pomysły; z drugiej jednak strony, jest krytyczna świadomość niedostatku, zdolna przesiewać pomysły, odrzucać niedobre, a z dobrych wybierać najlepsze. Nikt więc nie będzie twierdził, że studium logiki daje patent na inwencję; tym, co ono realnie daje to są kryteria wartościowania plodów inwencji.

Pod tym względem pouczająca jest lekcja historii logiki. W reakcji na logikę scholastyczną, której od czasów Renesansu zarzucano niezdolność atakowania problemów przez nowe pomysły, powstał program „logiki odkrycia” (*logica inventionis*); patronowali mu, każdy na swój sposób, Bacon, Descartes i Leibniz. Późniejszy rozwój logiki, choć przekroczył oczekiwania tych wielkich antenatów, nie potwierdził jednak nadziei, że stanie się ona przewodniczką w odkrywaniu prawd i dokonywaniu wynalazków. Stała się ona za to godnym zaufania sądem apelacyjnym, do którego można się odwoływać, zwłaszcza wtedy, gdy zawodzi instancja potocznego rozsądku. Na jej wyrokach umysł się uczy i tak pomnaża swą inteligencję.

Logika wchodzi dziś w związek z informatyką (*computer science*) oraz INFORMATYCZNĄ TEORIĄ UMYŚLU (*cognitive science*). Druga

z tych teorii ma w centrum uwagi zagadnienie sztucznej inteligencji oraz jej stosunku do inteligencji naturalnej.

Jak się ma pojęcie dowodu sformalizowanego do informatycznej teorii umysłu? Aktualność *Wprowadzenia*, gdy idzie o to zagadnienie, może się wydać zaskakująca, skoro powstało ono wcześniej niż owa teoria, Autor zaś nie należał do „komputerowego” (by tak rzec w skrócie) nurtu logiki. W gruncie rzeczy jednak, związek formalizacji z problematyką sztucznej inteligencji jest czymś bardzo naturalnym. Ogniwem, które je łączy (coś jak termin średni w sylogizmie) jest idea mechanizacji rozumowania. Formalizacja dowodu jest jego mechanizacją w ważnym tego słowa znaczeniu. Realizuje się bowiem przez branie pod uwagę jedynie konfiguracji znaków, czyli ich kształtu i położenia, a to są własności należące do mechaniki. Dzięki temu ktoś sprawdzający poprawność dowodu sformalizowanego zachowuje się zupełnie jak automat: nie potrzebuje on niczego rozumieć, a tylko mechanicznie manipulować symbolami wedle wskazanych dyrektyw.

Zastąpienie go w tej roli komputerem wymaga jeszcze dwóch kroków: (i) wybrania takiej teorii formalizacji, która będzie dla komputera najstosowniejsza (są to wyniki logiczne Gentzena, Herbranda, Skolema, Betha i in.) oraz (ii) zbudowania komputera (co jest w wielkiej mierze dziełem von Neumanna). Te dwa kroki techniczne, choć praktycznie decydujące, nie zmieniają samej natury formalizacji, także tej w wersji Tarskiego.²

Zobaczmy przeto, jak pojęcie dowodu sformalizowanego pomaga w badaniu inteligencji.

* * *

Na trop odpowiedzi kieruje we *Wprowadzeniu* przypis 1 do rozdziału VI powołujący się na dziełko Pascala *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*. Pierwszy człon tej opozycji to zdolność rozumowania dedukcyjnego, a więc tego, co stanowi przedmiot logiki. Drugi – to zdolność przekonywania, do której należy sztuka korzystania z różnych praw rządzących umysłem, nie tylko praw logiki. Całość owych praw tak jest według Pascala „nieskończenie złożona i nieuchwytna”, że lokuje się na drugim biegunie, przeciwnym do prostoty i uchwytności dedukcji, zwłaszcza w jej postaci sformalizowanej.

²Chodzi tu o różnicę między dowodem sformalizowanym z regułą odrywania i jej podobnymi, który choć nie wymaga inwencji od tego, kto go sprawdza, wymaga inwencji od jego autora (wersja stosowana przez Tarskiego) a dowodem robionym bez tego rodzaju reguł, nie wymagającym żadnej inwencji (wersja stosowana dla automatów). Por. W. Marciszewski i R. Murawski, *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Amsterdam 1995 (Rodopi, *Poznań Studies* [...]).

Dzięki temu badanie inteligencji można oprzeć na skali złożoności, w której kres dolny jest wyznaczony przez prostotę sformalizowanej dedukcji, a kres górny przez te czynności umysłu, które zawdzięcza on władzy z wielką trafnością określonej przez Pascala jako *esprit de finesse*. Jest w tym zwrocie odniesienie do postrzeganej przez Pascala (jak potem przez Leibniza i Cantora) zawrotnej złożoności świata. Dzięki tej władzy umysł radzi sobie jakoś z tą złożonością, nawet gdy przerasta ona niepomiarne możliwości werbalizacji czy ujęć teoretycznych. Oto jak pisze o tym sam Pascal.³

Jeżeli matematycy nie posiadają *esprit de finesse*, to stąd, iż będąc przyzwyczajeni do jasnych i grubych zasad matematyki i do rozumowania jedynie po dokładnym widzeniu i roztrząśnięciu swoich zasad, gubią się w rzeczach praktycznych, gdzie zasady nie dadzą się uchwycić w podobny sposób. Zaledwie je widzimy, raczej czujemy niż widzimy; nieskończenie trudno dać je odczuć tym, którzy nie czują ich sami z siebie: są to rzeczy tak subtelne i tak liczne, iż trzeba bardzo delikatnego i jasnego zmysłu, by je czuć i sądzić prosto i jasno wedle tego czucia, najczęściej bez możliwości udowodnienia ich po porządku jak w matematyce, ponieważ nie posiadamy ściśle ich zasad i ponieważ przedsięwzięcie to byłoby iście bez końca. Trzeba odrazu ogarnąć rzecz jednym spojrzeniem, a nie za pomocą kolejnego rozumowania [...] czyniąc to milcząco i bezwiednie.

Współczesny badacz inteligencji najlepiej zgłębi tę fundamentalną opozycję, gdy pod Pascelowy opis pracy matematyka podstawí budowanie teorii sformalizowanej – od momentu, gdy już dane są jej aksjomaty. Moment, gdy są one już dane, i pozostaje tylko sformalizowana procedura dowodzenia na ich podstawie kolejnych twierdzeń, dobrze się nadaje na punkt wyjścia w konstruowaniu rozumującej sztucznej inteligencji. Tak pojęta sztuczność, prawem tła kontrastowego, pomaga w uchwyceniu specyficznych rysów inteligencji naturalnej. A to z kolei owocuje kryteriami inteligentnego myślenia, do których ma się odwoływać racjonalny krytycyzm.

* * *

Podczas gdy, z jednej strony, formalizacja dowodzenia dostarcza tła kontrastowego dla badania inteligencji jako *esprit de finesse*, to z drugiej strony badania nad tą odmianą inteligencji mają coś do zawdzięczenia procedurom aksjomatyzowania teorii. Już nie na prawach kontrastu lecz podobieństwa – tego rodzaju podobieństwa, jakie zachodzi

³ *Myśli* w wydaniu Księgarni św. Wojciecha, w Poznaniu (b.r.w., przedmowa Boya z r. 1921). Cytowany tekst znajduje się na początku Działu I. Przekład Boya zmieniam przez zastąpienie słowa 'geometra' słowem 'matematyk'.

między wysoce uproszczonym wzorcem a jego skomplikowaną realizacją.

Alfred Tarski należał do pionierów tego spojrzenia na teorie dedukcyjne, w którym definiowanie pojęć uważa się za nie mniej ważne niż dowodzenie twierdzeń. Jego badania nad definiowalnością uitorowały drogę nowemu działowi metodologii nauk dedukcyjnych, rozwijanemu potem przez E. W. Betha. Nie ma we *Wprowadzeniu* wykładu teorii definiowalności, ale jest na każdym kroku pokazywana praktyka definiowania w jej obu rodzajach: definiowania pojęć wtórnych za pomocą pierwotnych oraz charakteryzowania pojęć pierwotnych za pomocą układów aksjomatów.

Charakterystyka terminów przez aksjomaty jest niezrównanym wzorcem tego procesu, którym jest rozwój aparatury pojęciowej języka. Każde wprowadzane doń pojęcie staje się zrozumiałe dopiero wtedy, gdy wejdzie w dostatecznie gęstą sieć powiązań z innymi pojęciami. Układy aksjomatów w teoriach dedukcyjnych dostarczają lekcji tworzenia pojęć, w której postępowanie da się prześledzić jak w eksperymencie laboratoryjnym; potem zaś tak opanowaną metodę, w miarę potrzeb i możliwości, można przenosić na procesy pojęciotwórcze w innych naukach i w życiu codziennym (np. stosowane w ekonomii pojęcie preferencji można precyzować wzorując się na podanych we *Wprowadzeniu* aksjomatycznych charakterystykach równości i mniejszości).

Tworzenie pojęć to doniosły problem językoznawczy. Takich ważnych powiązań z teorią języka i językową praktyką jest we *Wprowadzeniu* więcej. Należy do nich zagadnienie cudzysłowów, a także liczne, obszerne i bardzo jasne komentarze na temat stosunku między językiem symbolicznym logiki a językiem naturalnym.

Była dotąd mowa o powiązaniach treści *Wprowadzenia* z problematyką informatyczną, psychologiczną i językoznawczą. Obecność w niej problematyki matematycznej jest oczywista.

Nie mniej jednak niż do matematyków książka adresowana jest do filozofów. Autor podejmuje aktualne zagadnienia z filozofii matematyki i logiki, wiążąc je umiejętnie z ogólną filozofią. Przejawia się to w inspirujących odniesieniach do Arystotelesa, Stoików, Pascala, Leibniza, Cantora, Fregego, Russella, Carnapa i innych.⁴

⁴Kończąc ten przegląd zastosowań dydaktycznych i badawczych, wydawca pragnie podziękować osobom, które zabrały głos w dyskusji nad jego pierwotną wersją zawartą w *Biuletynie Komisji Logiki* Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, nr 3 (1994), mianowicie Janowi Tarskiemu, Urszuli Wybraniec-Skardowskiej i Ewie

Czy treść i forma książki dają podstawy, by ją adresować do jeszcze szerszego grona – do wykształconego i myślącego ogółu? Taki był zamysł Autora, gdy pisał po polsku jej pierwszą wersję. Uzupełnienie do rozmiarów podręcznika nie osłabiło tego pierwotnego trzonu, którego potencjalnym czytelnikiem miał być wzorowy inteligent – na tyle inteligentny, że mający potrzebę rozwijania *dzielności umysłu*.

Witold Marciszewski

Białystok i Warszawa, czerwiec 1995

Żarneckiej-Biały (za usterki, jeśli nadal pozostały, odpowiada tylko wydawca). Osobne podziękowanie należy się Janowi Tarskiemu za udostępnienie portretu Alfreda Tarskiego, którego reprodukcja znajduje się na okładce, oraz Urszuli Wybraniec-Skardowskiej za wykonanie i użyczenie filmu.

Skorowidz

Opracowała Monika Sujczyńska

Skorowidz zawiera ważniejsze terminy, które występują w książce w znaczeniu technicznym, wyrażenia o szczególnym znaczeniu i doniosłości, kilka haseł nietechnicznych oraz nazwiska filozofów i uczonych wymienionych w książce (poza wstępami). W nawiasach kwadratowych po terminie (lub wyrażeniu) podano używany w książce synonim tego terminu (lub wyrażenia).

Skorowidz podaje głównie numery stron, na których pojawia się dany termin lub komentarz na jego temat. W przypadkach niektórych terminów lub wyrażeń skorowidz odsyła do fragmentu, gdzie występuje ich synonim lub odpowiedni symbol, ewentualnie przykład ilustrujący występowanie tego terminu lub wyrażenia (bez komentarza).

W przypadku terminu, który przewija się przez całą książkę, zazwyczaj podane są tylko wybrane strony; drukuje się je wtedy pochylonym drukiem. Pochylony wskazuje też na hasła, które są słowami obcego pochodzenia, terminami przestarzałymi lub wyrażeniami użytymi w szczególnym znaczeniu.

ABEL N. H. 183

abstrakcja: zasada abstrakcji 100

aksjomat 122

– ciągłości [DEDEKINDA] 233n

– nieskończoności: → nieskończoność
aksjomatyzacja arytmetyki: → arytmetyka

– geometrii: → geometria

– teorii logicznych: → teorie logiczne

albo ... albo 22, 79, 172; → *lub*

algebra (– wyższa) 3, 83, 183

– [rachunek] klas 71, 74n, 81, 86n, 94n, 148n

– [rachunek] relacji 93n, 114, 119, 165, 232

– elementarna (szkolna) 3, 29, 62n, 103n

algorytm [metoda mechaniczna] 142

alternatywa [suma logiczna] 22n, 39n, 160, 173, 186, 194

„*alternatywa*” jako termin metodologiczny 146

człony alternatywy [składniki sumy logicznej] 22

wyłączające (niewyłączające) zna-

czenie alternatywy 22

analiza (– matematyczna) 83

– językowa (w logice średniowiecznej i filozofii) 60, 74

antynomia klas RUSSELLA 77

argument, wartość argumentu 103n, 106, 110n, 120; → funkcja

ARYSTOTELES 20, 154

arytmetyka 3, 165n

aksjomatyzacja arytmetyki 126, 229n

teorie elementarne arytmetyki, 215n

pełna arytmetyka liczb rzeczywistych 224n, 231

interpretacja arytmetyki w zakresie geometrii i logiki 133, 193, 228, 231

zagadnienia niesprzeczności i zupełności arytmetyki 142n, 215, 228

asymetria: → prawo asymetrii

BANACH S.: → paradoks Banacha–Tarskiego

BARBARA: → prawo sylogizmu

BARBARA

- BERNAYS P. 147, 156
 błędne koło w definiowaniu,
 – w dowodzeniu 35, 85, 124
- BOLZANO B. 110
- BOOLE G. 20, 72
był 56, 72
 – nie istniejący 4, 77
- CANTOR G. 72
- CARNAP R. 147
- CHURCH A. 144
- ciało (– przemienne), – liczbowe
 uporządkowane 238
- ciągłość: aksjomat ciągłości [prawo
 –] 232n
- cofanie się do nieskończoności [*regre-*
ssus in infinitum] 124
- co najmniej jeden, co najmniej dwa,*
co najwyżej jeden 65n
- CORCORAN J. xix
- cudzysłów 62, 68
- człony koniunkcji [czynniki iloczynu
 logicznego] 21
- czynnik w iloczynie względnym (re-
 lacji) 179
- w mnożeniu 235
- DEDEKIND R. 231
- DE MORGAN A. 53, 74, 92
 → prawa De Morgana
- dedukcja: → wyprowadzenie
- definicja 33n, 124, 139
 definiendum, definiens 35n, 148,
 197n
 → reguły definiowania
- DIODOR KRONOS 27
- dla dowolnych, dla niektórych* 8n, 37n,
 166
- dodawanie klas 78n, 86, 111, 195
 – liczb 8, 174n
 – logiczne (zdań) 36n, 42, 52, 193
 → suma
- dokładnie jeden* 65
- domknięta ze względu na działanie* 182
- dowolny: dla dowolnych* 36
- dowód 124
 – nieformalny 58, 168, 170n
- nie wprost [– przez sprowadzenie do
 niedorzeczności] 167n, 177, 189n,
 192n, 211n
- zupełny 49n, 53n, 58, 139n, 148,
 151n, 169, 187, 189, 194
- dwa: składa się z 2 elementów* 84
- „dwa”* (w kwantyfikatorze ilości-
 wym) 65n, 69
- działania arytmetyczne, podstawowe
 – 6, 109n, 143, 213, 229, 231
- działanie binarne 112, 166, 185, 202
 – logiczne 113
 – łączne 182, 201
 – monotoniczne: → monotoniczność
 – na klasach 80n, 88n, 112n
 – na relacjach 94n, 114n, 119
 – odwracalne (prawo-, lewostronnie)
 182, 204, 237
 → odwracalność
- odwrotne 196, 204
- przemienne 182, 196, 209, 237n,
 241
- rozdzielne 237
- unitarne 113
- dziedzina funkcji 108
- relacji 92, 114
- teorii 76, 82, 98, 152n,
 166, 183n, 209
- ekwipolencja [równoważność] 137n,
 148, 210, 214, 221, 227n, 240n
równoważny pod względem dowo-
du a równoważny pod względem
wyrażenia 137
- EUKLIDES 125
- figura geometryczna 64, 73, 81, 99,
 143, 153
konfiguracja geometryczna a
figura geometryczna 73
- FILON Z MEGARY 27
- filozofia: uwagi odnośnie niektórych
 zagadnień filozoficznych 28, 59,
 76n, 82, 147
- forma zdaniowa 13
- formalizacja definicji i dowodów 139n,
 150n, 222n

FREGE G. 20, 85, 139, 156

funkcja 103

- dwóch zmiennych [dwuargumentowa] 112
- injektywna, surjektywna: → odwzorowanie
- jednej zmiennej [jednoargumentowa] 112
- dwuwartościowa, wielowartościowa: → relacje między liczbami
- liniowa 239
- nazwowa [– opisowa] 6n, 14, 30, 38, 75n, 88, 107, 184, 197
- numeryczna 39
- odwracalna: → relacja wzajemnie jednoznaczna
- prawdziwościowa 39n
- propozycjonalna [– zdaniowa, forma zdaniowa] 12
- surjektywna: → odwzorowanie
- trzech zmiennych [trójargumentowa] 112
- zdaniowa 5n, 16

GALOIS E. 183

geometria 7, 19

- analityczna 133
- elementarna (licealna) 64, 71, 143, 191, 200
- nie-elementarna 143
- aksjomatyczne podstawy geometrii 111
- interpretacja geometrii w obrębie arytmetyki i logiki 136, 231
- niesprzeczność i zupełność geometrii, zagadnienie rozstrzygalności 143n, 231
- równość w geometrii, „geometrycznie równe” 64, 68, 101

GERGONNE J. D. 80

GÖDEL K. 144

gramatyczna postać (zdania) 4, 20, 26, 35, 61, 139, 147

grupa abelowa 182n, 201, 209, 227n, 241

- – uporządkowana 207, 217, 219, 226
- – – w sposób gęsty [– ciągły] 235n,

239; → prawo gęstości, relacja gęsta

HAUBER K. F. 188

HERBRAND J. 133

HILBERT D. 126, 143, 147, 231

HUNTINGTON E. V. 231

i (spójnik) 20n, 38

identyczność [równość] 55, 91

jest identyczne z [jest tym samym co] 55

– klas 77n, 87

– relacji 94

znak [symbol] identyczności 63, 91

prawo identyczności 37n, 58, 78, 102, 152n

prawa teorii identyczności 56n, 63, 67n, 187n

iloczyn 51

– bezwzględny [skrzyżowanie] relacji 95

– względny [złożenie] relacji: → złożenie

– [skrzyżowanie] klas 80

iloraz 51, 197

implikacja [zdanie warunkowe] 24n, 40n, 43n, 48, 186, 189n, 194n

– w znaczeniu formalnym [– formalna] 26

– w znaczeniu materialnym [– materialna] 26

indywiduum 71, 76n, 84n, 93n, 151, 325

zmienna indywiduowa 151

informatyka 143, 246

inkluzja klas 77n, 87n, 103, 153n, 202

interpretacja systemu aksjomatycznego, metoda dowodzenia przez interpretację 129n, 133n, 211n, 224n, 230, 241

– terminu pierwotnego 133n, 186

istnieje [istnieje] 8

jest mniejsze od, jest większe od 165
*jest mniejszy lub równy [jest nie
 większy niż]* 33

jest równe z: $\rightarrow$ *równa się*
jest różne od [nie jest identyczne z]
 55n

jest uporządkowana przez relację 101
jeśli ... to 20, 24n, 29, 36, 38

jeśli, o ile 35

język: czynniki psychologiczne w
 języku 23n, 28

- codzienny [j. potoczny, j. powsze-
 chny] 5, 10, 15, 20n
- naukowy, – logiki 13n, 22n, 31n, 43,
 50n, 60n, 105n, 147, 174

każdy: dla każdego 8n, 36n, 125,
 160n

klasa [zbiór] 71n

klasa a zbiór 72

- „niehomogeniczna” 77n
- nieskończona, – skończona, pojęcie
 nieskończoności 72, 83n, 88, 110,
 212, 239
- ogólna teoria klas xxi, xxiii, 71n,
 77, 85, 110, 145, 225
- pełna, – pusta 76n, 82n, 88, 98,
 130n, 183
- pierwszego, drugiego rzędu 71, 76n,
 83n, 93n
- i własność 75, 80, 83, 99
- uporządkowana 101, 118, 172, 215,
 228, 235
- w sposób gęsty 231

*klasa wszystkich przedmiotów takich,
 że* 74

klasy równoliczne [równoważne] 83n,
 89, 100, 110n, 120

$\rightarrow$ liczba kardynalna

- wzajemnie się wyłączające
 [– rozłączne] 78n, 88, 92,
 $\rightarrow$ zachodzenie klas

KLEIN F. 183

Koło Wiedeńskie xn

komputery, informatyka 144

konfiguracja geometryczna [zbiór
 punktów] 71, 73, 143, 201, 204,

241

koniunkcja (zdań) [iloczyn logiczny]
 21, 50, 54, 65, 151, 160

kontrapozycja: prawo kontrapozycji
 [transpozycji] 45n, 53, 89 154,
 160, 189, 191, 193

konwers [odwrócenie] relacji 97, 108,
 115, 119, 171, 178

KOTARBIŃSKI T. xxi

krzyżowanie się klas: $\rightarrow$ zachodzenie
 klas

kształt figury geometrycznej 99n, 117

kwantifikator 66, 74

– egzystencjalny 9n

– ogólny 8n, 37, 42, 47n, 152, 166n

– ilościowy 65n, 69n, 205

kwantyfikatory a operatory 9

LEIBNIZ G. W. 20

LEŚNIEWSKI S. 139, 147

LEWIS C. I. 28

liczba 3

jest liczbą 4

– całkowita 3

– dodatnia 3, 78

– kardynalna [moc, l. elementów
 klasy] 72, 83n, 100, 110, 120

– naturalna 51, 85

– niewymierna 3

– pierwsza 81

– rzeczywista 3, 82, 166n, 224n, 240

– ujemna 3, 81, 84n, 109n, 223n

– urojona 3

– wymierna 3, 78, 85, 224n, 240

liczby względnie pierwsze 115

– zespolone 3, 231

LIE S. 183

logiczne mnożenie zdań 37n, 53

logika arystotelesowska [tradycyjna
 (dawną)] 18n, 78, 154

– dedukcyjna 125n, 140, 147

– [rachunek] predykatów 66, 210

– [rachunek] zdań 20, 66

– współczesna, nowoczesna 23n,
 26, 31, 44, 77, 104, 113,
 124n, 139n, 146

logistyka [logika matematyczna,
logika symboliczna] 19

lub 18n, 22, 26, 28, 146, 173;
→ *albo ... albo*

łączność 43, 81, 183, 235

prawa łączności w algebrze klas 81
– arytmetyce 174n, 183, 200n, 228n
– rachunku zdań 43, 156

ŁUKASIEWICZ J. 20

matematyka 3

– licealna 3

– wyższa 3, 12

MAZURKIEWICZ S. xxiv

metalogika, metamatematyka 147

metoda dedukcyjna 125n

– dowodzenia przez wskazanie
modelu, – – – interpretację
→ interpretacja systemu aksjo-
matycznego

– graficzna 136

– tabelek prawdziwościowych [– ma-
trycy] 38

– zero-jedynkowa 40

metodologia nauk dedukcyjnych 32

– matematyki 123

mnożenie klas 80n, 88, 201n, 242

– liczb 197n, 200n, 227, 237n;

→ iloczyn

→ logiczne mnożenie zdań

moc: → liczba kardynalna

model [realizacja] systemu aksjoma-
tycznego, – teorii dedukcyjnej
129n, 147n, 177, 200, 211

teoria modeli 147

moduł działania (prawostronny, lewo-
stronny) 236n

monotoniczność, prawa monotonicz-
ności, działania monotoniczne
184n, 190, 192, 198, 202n,
215, 237n

mówimy, że 35n, 211

należy do [jest elementem], 72

następnik [wniosek] implikacji: →
poprzednik

następnik relacji 92, 103

nauka doświadczalna xiii, 107, 116

– [teoria] dedukcyjna xiii, 123, 134,
139n, 145n, 150n, 212n

formalny charakter nauk deduk-
cyjnych 135

sformalizowana nauka dedukcyjna
139n, 149, 222, 225

syntaktyka i semantyka nauk dedu-
kcyjnych 147

nauki wcześniejsze od danej nauki
125, 132n, 165, 223n

nawiasy 10, 38n, 156, 184, 198n, 225

negacja zdania 21, 39, 44n, 141n

– [uzupełnienie] relacji 95n, 119n, 178
nie 20n

niektóre 10

nie jest prawdą, że 21

nierówność 30

– a różność 96

– liniowa 239

– w szerszym (węższym) znacze-
niu 174

nieskończoność: aksjomat nieskończo-
ności 85, 136

niesprzeczność, niesprzeczny system
aksjomatyczny, niesprzeczna teo-
ria dedukcyjna 141n, 151, 212n,
222n, 230

– względna 231

niewiadoma (w równaniu) 6

niezależny system aksjomatyczny, sy-
stem aksjomatów wzajemnie nie-
zależnych 138, 149, 152n, 156n,
210n, 225n, 235, 239

– terminów pierwotnych, terminy
pierwotne wzajemnie niezależne
138, 215n, 235

niezupełny system aksjomatyczny,
niezupełna teoria dedukcyjna
143n, 225

obraz (funkcji) 108

odcinek 64; → przystawanie figur
geometrycznych

oddziela jeden zbiór liczb od drugiego,
liczba, która oddziela 236,

- 240
- odejmowanie 195n, 198n, 204, 241
- odrywanie, reguła odrywania [reguła *modus ponens*] 47, 152, 157, 169, 186
- odwracalność, prawo odwracalności prawostronnej 181, 183, 237
- odwrotność zdania [zdanie odwrotne, konwers] 32, 44n, 53, 152, 157n, 191n, 203
- odwzorowanie injektywne 108,
- jednojednoznaczne, 108n
 - surjektywne, 108
- ogólna teoria zbiorów: → zbiór
- operator wiążący zmienne 10n, 65, 74n
- ośrodek w Berkeley xxiin
- – Göttingen 147
 - – Lwowie xxi
 - – Warszawie xxi, 147
 - Koło Wiedeńskie
- oznaczają*, [*są nazwami*] 7
- oznaczenie 6n, 60n, 73n, 88, 146
- relacja oznaczania 146
- paradoks Banacha–Tarskiego xxi
- PASCAL B. 123
- PEANO G. 126, 231
- PEIRCE C. S. 14, 38, 92
- pewien* 10
- pierwiastek równania: → równanie
- pociąga za sobą* 30, 32, 43
- podklasa [podzbiór] 77n, 88, 153n
- właściwa [część klasy], inkluzja
 - właściwa 78, 110, 119, 155
- podobieństwo, relacja podobieństwa 99n
- podręczniki: komentarze i krytyka 4, 30, 64, 77, 104n, 140n, 149
- „podstawa” a „podstawowe narzędzie” 114
- podstawianie: reguła podstawiania 47n, 54, 57, 151, 156, 169
- „podstawianie” a „zastępowanie” 47
 - równoważnych funkcji zdaniowych 34n, 53, 152n, 157, 160, 171
 - stałych za zmienne 5n, 47
- podstawy arytmetyki 125, 231n
- geometrii 125
 - matematyki 13, 143
- podwójne uzupełnienie: prawo podwójnego uzupełnienia 88, prawo podwójnej negacji 53
- podzielność: relacja podzielności, podzielny, dzielnik 51n, 115
- pojęcie 63, 102
- logiczne 19, 55, 63, 113, 136, 139, 167, 242
 - matematyczne, – arytmetyczne 63, 84, 134, 231
 - metodologiczne 131, 133, 141, 167
 - termin metodologiczny
- poprzednik [założenie] i następnik [wniosek] implikacji 24n, 32n, 39n, 43n, 48, 191
- poprzednik i następnik relacji 92
- porządek leksykograficzny 118
- POST E. L. 144
- postulat [twierdzenie pierwotne, aksjomat] 124
- metodologiczny (zasada metodologiczna) 123n, 138n, 214
- półprosta 81, 109n, 200
- prawa algebry klas 78n, 87n, 94n
- – relacji 94n, 98n, 115
 - De Morgana 53, 88, 186, 194
 - metodologiczne 132n, 145, 151, 167, 191, 232
 - przemienności w algebrze klas 81
 - – w arytmetyce 7, 183n, 209n, 237
 - – w rachunku zdań 42n, 58, 155, 158n
 - rozdzielności w algebrze klas 88
 - – w arytmetyce 236n
 - – w rachunku zdań 53, 160, 194
 - teorii identyczności: → identyczność
 - – relacji 94n, 119, 128, 177n, 228
 - uporządkowania liczb 167
- prawda 8, 21nn, 59, 82, 146
- prawo, twierdzenie uznane 3
- asymetrii 160n
 - ciągłości 231
 - dedukcji [twierdzenie o dedukcji]

- 133n, 213, 231
- dodawania liczb 183, 236n
- – logicznego 37n, 194
- gęstości 233n
- Haubera [systemów zamkniętych] 190n
- identyczności: → identyczność
- kontrapozycji: → kontrapozycja
- Leibniza 56n, 63n, 67, 75, 170n, 184, 187
- logiki predykatów 211
- łączności: → łączność
- matematyczne 29
- mnożenia liczb 236n
- monotoniczności: → monotoniczność
- odejmowania 197n, 204
- ogólne [– o charakterze ogólnym] 7
- podwójnego przeczenia 53
- – uzupełnienia 88
- prawostronnej odwracalności 183, 237
- przechodności: → przechodność
- przeciwzwrotności: → przeciwzwrotność
- przekształcania równań i nierówności w równoważne 190
- przemienności: → przemienność
- przekształcania równań i nierówności 187, 192n, 198
- rachunku zdaniowego 36
- *reductio ad absurdum* 168
- rozdzielności lewostronnej, prawostronnej 239, 242
- spójności 172n, 214
- sprzeczności 43, 82, 142
- sylogizmu Barbara 80
- – hipotetycznego 37n, 54, 154, 158n, 194
- – kategorycznego 78, 87, 152n
- symetrii 59n, 195
- symplifikacji: → symplifikacja
- systemów zamkniętych [– Haubera] 188
- tautologii 43, 58, 81
- tożsamości 37
- transpozycji: → kontrapozycja
- trychotomii: → trychotomia
- wykonalności: → wykonalność
- wyłączonego środka 43, 82, 142
- zwrotności: → zwrotność
- predykat 66: → logika predykatów
- Principia Mathematica* 13, 20, 77, 85
- prosta, półprosta 81, 109n, 136, 143
- proste równoległe, relacja równoległości 52, 99, 116, 147
- przechodność: prawo przechodności dla inkluzji 78, 153
 - – – – relacji identyczności 58n, 187, 193, 195
- przeciwdziedzina relacji, 92, 114
- [obraz] funkcji, 108
- przeciwieństwo zdania: → zdanie przeciwne
- przeciwzwrotność: prawa przeciwzwrotności 167n
- relacja przeciwzwrotna 98, 101n, 119, 170, 178
- przedmiot* 55
- przedział domknięty 86n, 120
- przekształcenie wyrażeń algebraicznych 183n, 187, 192n, 198n
- przemienność 43, 81, 183, 237
- przybiera wartości ze zbioru* 108
- przyporządkowuje wartości argumentu*, 104
- przystawanie figur geometrycznych (odcinków) 64, 69, 99, 101, 111, 115n, 126n, 148, 152
- punkt 72, 109n, 136, 200
 - zbiór wszystkich punktów
- quod erat demonstrandum (q.e.d)* 171
- rachunek całkowity 12
- [algebra] klas 83
- predykatów [logika predykatów] 66
- [algebra] relacji 94
- zdań [– zdaniowy, logika zdaniowa] 20n, 156
- rachunek a logika* 66
- rachunek funkcyjny* 66
- realizacja systemu aksjomatycznego

129n, 147
reductio ad absurdum 168
regressus in infinitum 124
 reguła *modus ponens*: → odrywanie
 reguły rachunku zdań 149, 156n
 – definiowania 35n, 139, 148n, 155
 → błędne koło w definiowaniu
 – dowodzenia [dowodu] 47, 139
 → błędne koło w dowodzeniu
 – odrywania: → odrywanie
 – podstawiania 47
 – zastępowania równych 57
 relacja 91n, 128
 – arytmetyczna 167, 173n
 – asymetryczna 98, 102n, 119, 161, 172
 – binarna [dwuczłonowa] 102, 111, 160, 178, 195
 – czteroczłonowa 111n
 – dwuczłonowa 111
 – funkcjonalna [funkcja] 103
 – gęsta 235, 240
 – identyczności 91, 95n, 99, 101, 130, 167, 187
 – inkluzji [zawierania] 94, 119, 179
 – – właściwej 156
 – jednoznaczna [– funkcjonalna, funkcja] 103
 – *leży między* 111, 119
 – „mieszana” 93n
 – mniejszości, *jest mniejszy niż* 101
 – podobieństwa 100n
 – podzielności 115
 – poprzedzania 118
 – porządkująca 101n, 118, 172
 – przechodnia: → przechodniość
 – przeciwpzechodnia 116, 119
 – przeciwwrotna: → przeciwwrotność
 – przystawiania odcinków 99, 115, 126n
 – pusta 94n
 – rozłączności 78n, 92, 153
 – różnokształtności: → znaki różnokształtne
 – równoległości 99, 147
 – równoważnościowa [– równoważno-

ści] 99n, 130
 – *jest równy lub mniejszy od* 33n, 173
 – różnokształtności: → znaki różnokształtne
 – różności: → różność
 – spójna: → spójność
 – symetryczna 98n, 103, 119n, 128n
 – trójczłonowa 111n, 120
 – uniwersalna 94, 130
 – wieloczłonowa 111n, 120
 – wynikania 32, 33, 35, 145
 – – w obu kierunkach 33
 – wzajemnie jednoznaczna [funkcja odwracalna] 108
 – zachodzenia na siebie [krzyżowania się] klas 78
 – zwrotna: → zwrotność
 relacje arytmetyczne 161, 167n
 – między klasami 77n, 80, 86n, 91, 202
 – – liczbami 106n, 163
 – – relacjami 94
reprezentuje nazwę 7
 – trójczłonowe 111n, 120, 197
 rozstrzygalna teoria 142n, 225
równa się [jest identyczne z] 55
 równanie 30, 175
 pierwiastek równania 6, 30, 69
 strona równania 176n
 – algebraiczne 3, 6
 – liniowe 187, 239
 równość [identyczność] 55, 63, 91, 99n
 równoważność (zdań), zdania równoważne 32n, 51, 100, 171n, 214
 strona równoważności 32
równoważny 173
równoważny pod względem dowodu a równoważny pod względem środków wyrazu → ekwipolencja
 różnica (w odejmowaniu) 13, 196, 204
 – klas 89
 różność: relacja różności 92, 96n, 103, 171
 „różność” a „nierówność” 96
 RUSSELL B. 20, 77, 85
 → antynomia klas Russella
 rząd klasy 71, 76n, 83n, 93n

- relacji 93n
- schemat [wzorzec] dowodu 189, 194, 204
- schematyczna postać (implikacji etc.) 44n, 190, 194, 211
- SCHRÖDER E. 92
- semantyka 147
- sformalizowana teoria dedukcyjna:
 - formalizacja definicji i dowodów
- SIERPIŃSKI W. xxiv
- singleton 84
- składa się z jednego, dwóch elementów* 84
- składniki (w arytmetyce) 166, 183
- sumy logicznej 22
- słowa i ich nazwy 60n, 67
- „słuszny” a „prawdziwy” 59
- spełnia funkcję zdaniową [spełnia dany warunek]* 5, 65
- *twierdzenia teorii* 129, 132
- spójnik zdaniowy 20, 32, 36, 50, 156, 225
- spójność: prawa spójności 172, 214
- relacja spójna 98, 101n, 119n, 172, 178, 228
- sprzeczność: teorioklasowe prawo sprzeczności 82
- stała (matematyczna, logiczna) 3n, 19n
- strona równania: → równanie
- równoważności 32
- suma 163
- algebraiczna 191n
- klas 80n, 87n
- liczb 3, 13, 165
- logiczna [alternatywa] 22
- relacji 95, 115
- względna dwóch relacji 97
- suppositio formalis, suppositio materialis* 61
- sylogizm hipotetyczny: → prawo sylogizmu hipotetycznego
- sylogizm kategoryczny: → prawo sylogizmu kategorycznego
- symbole i ich nazwy 60n
- kształt symbolu 60
- algebry klas, – relacji 94n
- arytmetyczne, – matematyczne 3, 63
- identyczności: → identyczność
- dla kwantyfikatorów 10, 16
- liczbowe 184
- logiczne 17, 38n, 42, 168, 205
- w rachunku zdań 16, 38n, 156
- zawierania [– „ $\in$ ”] 72, 94
- symboliczne oznaczenie klasy 74
- symplikacja: prawo symplikacji dla dodawania logicznego [prawo dodawania logicznego], prawo symplikacji dla mnożenia logicznego [prawo mnożenia logicznego] 37n, 42
- prawa symplikacji w algebrze klas 88
- system aksjomatów 127, 207
- symetryczny 169, 178, 210
- – wzajemnie niezależnych 138, 149, 153n, 157, 210, 225, 236, 239
- formalny 135
- terminów pierwotnych 136n, 221, 231
- zamknięty zdań 190n, 203
- zdań, – twierdzeń 3, 132, 137, 212
- syntaksa 147
- polska szkoła x, xxi
- szkoła stoików 27
- tabelka prawdziwościowa [matryca] 40
- podstawowa tabelka prawdziwościowa, pochodna tabelka prawdziwościowa 41n, 150
- TARSKI A. 133, 138, 143, 146
- tautologia
- prawo tautologii w algebrze klas 81
- – w rachunku zdań 43, 58
- teoria dedukcji* [rachunek zdań] 66
- teoria dowodu 147
- grup 113, 183, 203n, 227n, 241
- identyczności 55n
- prawa teorii identyczności
- jako system formalny 135
- klas 71, 144

- mnogości 72
- modeli 147
- naukowa, nauka 3, 19, 28, 48, 55
- relacji 91n, 128, 177, 228
- równań algebraicznych 3
- typów logicznych 77n
- „własności” 75
- względności 116
 - rozstrzygalna teoria
- teoria zmiennych pozornych* [logika predykatów] 65
- teorie logiczne 82, 154n, 231
 - aksjomatyzacja teorii logicznych 151n, 232
- teorioklasowe prawo (prawo algebry klas) 78, 81n, 88, 94
- teorioklasowe prawo De Morgana 88
- teorioklasowe prawo identyczności 78
- teorioklasowe prawo sprzeczności:
 - sprzeczność
- teorioklasowe prawo wyłączonego środka 82
- termin definiowany 19n, 125, 146, 223n
 - arytmetyczny, – matematyczny 3, 19, 65, 134n, 139n, 223n
 - metodologiczny 30, 145, 151
 - pierwotny [– niezdefiniowany] 124n, 150n, 156, 165, 207, 213n, 221n, 231n, 235n, 240n, 242
- teza [następnik] implikacji, – twierdzenia 29n, 59, 186, 192n, 219n, 241
- transpozycja: prawo transpozycji
 - kontrapozycja
- trychotomia: prawo trychotomii w słabszej postaci 167n
 - – w silniejszej postaci 167, 172, 174n, 185n, 191n
- trzy wartości logiczne 82
- twierdzenie 3, 29, 124, 167
 - pierwotne [aksjomat, pewnik, postulat] 124
 - uznane [prawo] 3, 124
- typy logiczne 77n
- ułamek algebraiczny 30
- właściwy 82, 224, 235, 240
- ustala porządek* 101
- ustala odpowiedniość doskonałą* 108
- uzupełnienie [dopełnienie] klasy 82, 88n
- [negacja] relacji 95n
- używamy zdania a przytaczamy zdanie* 61
- VAILATI G. 168
- VIETA F. 14
- wartość argumentu 103n, 108, 112, 120
 - bezwzględna 177
 - funkcji 103n, 108, 112
 - liczbowa [liczba] 40
 - logiczna 39n, 82
- warunek (założenie, przypuszczenie) 29n, 32n, 127, 198, 212
 - [funkcja zdaniowa] 5, 12
 - konieczny, – wystarczający 30
 - konieczny i wystarczający 33
- WHITEHEAD A. N. 20, 85
- „wielkość stała” a „wielkość zmienna” 5, 104n
- wielobok 64, 83, 89, 99
- wielomian 30
- własności i klasy 75, 80n, 83, 99
 - każda własność* (w teorii identyczności) 56n
- wniosek [twierdzenie wyprowadzone z innych twierdzeń] 56, 63, 125, 189
- WOODGER J. H. xxii
- wszystkie* 10
- wtedy i tylko wtedy, gdy* 32
- wybór aksjomatów, – terminów pierwotnych 136n
- wykonalność: prawa –, działanie wykonalne 182n, 198, 204, 209, 237n, 239
- wyłączony środek: prawo wyłączonego środka w algebrze klas 82
 - – – w rachunku zdań 43, 82, 142
- wyłączające znaczenie alternatywy

- 22, 172
- wynika* 30, 32, 43
- wynik działania 112
- wyprowadzenie [dedukcja] 24n, 49, 54, 124
- wyrażenie 4n, 65n, 107, 137, 145
 - algebraiczne 6, 29, 177
 - rachunku zdań: → funkcja prawdziwościowa
 - językowe 60n: → język codzienny
- wzorzec [schemat] dowodu
- wzór 5

- zachodzenie [krzyżowanie się] klas 78n, 92, 155
- zagadnienie rozstrzygalności, procedura –, teoria – 143n, 150, 224
- założenie [poprzednik] implikacji, – twierdzenia 29n
- zasada abstrakcji 100
- zastępowanie zmiennej stałą 5
- zawiera w sobie jako element* 72
 - *w sobie jako podklasę* 77
- zbiór [klasa] 71n
- zbiór wszystkich punktów [miejsce geometryczne wszystkich punktów]* 73
- zdania egzystencjalne [– o charakterze egzystencjalnym, – absolutnie egzystencjalne] 8n, 84, 128
 - fałszywe 5
 - przeciwne [przeciwieństwo danego zdania] 44
 - przeciwstawne 44n, 53, 194
 - równoważne: → równoważność
 - sprzeczne 21, 141n, 222, 224
 - sprzężone 44n, 53
 - jednostkowe 9
 - warunkowe [implikacja] 24, 31n, 50, 190
 - warunkowo-egzystencjalne 9
- zdanie obalone 142, 223
 - prawdziwe 8, 21, 59
 - alternatywa prawdziwy-fałszywy 82
 - „zdanie” a „funkcja zdaniowa” 5
 - przeciwne 44n, 53, 191
 - przeciwstawne 44n, 53, 193
- złożenie [iloczyn względny] relacji 96, 114, 119, 179
- złożona funkcja zdaniowa 39n, 156
- zmienna indywiduowa: → indywiduum
 - matematyczna 3
 - niezależna, – zależna 104
 - wolna [– rzeczywista] 11n, 15n, 68n, 73n, 88, 93, 117n, 128, 132
 - zdaniowa 36n, 47, 69, 151, 156
 - związana [– pozorna] 11n, 16n, 47n, 68, 73, 88
 - – *przez kwantyfikator* 12
- zero, symbol „0” 51, 76, 197n, 236
- znak (we wzorze) 117, 184, 192
- znaki równokształtne, różnokształtne 117
- zbędne aksjomaty, zbędne terminy
 - pierwotne 138, 157, 207n, 213n, 235, 240
- „zmienna niezależna”, „– zależna” 104
- zupełność 141
 - systemu aksjomatycznego nauki dedukcyjnej 141n, 151, 223n
- zwrotność: prawo zwrotności dla identyczności 56n, 185
- relacja zwrotna 98n, 116, 119, 128n, 170, 178

