O logice predykatów – Posłowie do drugiego wydania

polskiego przekładu książki Alfreda Tarskiego

Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences

Oxford University Press, 1994, fourth edition edited by Jan Tarski

Pierwsze wydanie polskie w/w edycji pt. *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych*, w przekładzie Moniki Sujczyńskiej, ukazało się w roku 1994 pod redakcją Witolda Marciszewskiego nakładem *Fundacji na rzecz Informatyki, Logiki i Matematyki* w Warszawie (Copyright) oraz *Filii Uniwersytetu Warszawskiego* w Białymstoku. Drugie wydanie, uzupełnione niniejszym Posłowiem (w miejsce Posłowia z 1-go wydania), ukazało się w roku 1966.

Intencją tego uzupełnienia jest aktualizacja *Wprowadzenia* przez dodanie aneksu na temat logiki predykatów. Dział ten nie został uwzględniony w wersji oryginalnej, zapewne z tego względu, że czytelnik amerykański, do którego książka była adresowana, ma dostęp do obfitości publikacji szeroko traktujących ten temat. Inna jest jednak w tym względzie sytuacja czytelnika polskiego. Omówienie logiki predykatów ograniczyłem do systemu tabel analitycznych. Tłumaczy się to aktualnością tego systemu, którą zawdzięcza on swej formie prawie-algorytmicznej („prawie" z racji braku rozstrzygalności logiki pierwszego rzędu); wiąże go to z komputerowym dowodzeniem twierdzeń, które stanowi dział jakże dziś aktualnej problematyki sztucznej inteligencji.

Obecny komentarz do Posłowia dołączam po upływie czasu, który przyniósł możliwości elektronicznej komunikacji nieosiągalne w roku 1996. Łaczę z tym prośbę o uwagi, czy to w charakterze krytyki czy kontynuacji, które mogłyby pomóc w ulepszeniu dotychczasowej wersji. Dogodnym dla takiej dyskusji miejscem jest blog „Polemiki i Rozmówki" (*blog.marciszewski.eu*), kategoria „światopogląd informatyczny".

Witold Marciszewski, w lutym 2012

Logika, obecna w kulturze zachodniej od jej greckich początków, w uczelniach średniowiecznych znalazła się w magicznej liczbie siedmiu sztuk wyzwolonych, *artes liberales*, zachęcajających umysł do swobodnego lotu. Jak skorzystała z tej szansy, wyraził żywo C. S. Peirce: *Wszystkie razem wzięte zastosowania logiki mniej znaczą aniżeli ów skarb czystej teorii. Ogarnąwszy jej przedmiot, widzimy, że logika jest wizją i osiągnięciem tej Rozumności, dla której Niebo i Ziemia zostały stworzone.* Słów tych użył jako motta E. W. Beth w pracy o tabelach semantycznych (1955), będących szczególnie praktycznym środkiem dowodzenia (z nich wywodzi się technika omówiona tu w odc. 3). Jest w tym osobliwość cywilizacji zachodniej, że sięgnęła szczytów praktyczności dzięki postawie głęboko spekulatywnej, skierowanej ku Rozumności samej w sobie.

Sprawą humanisty są przygody myśli, ma więc logika poczesne miejsce w centrum humanistyki. A że jest zarazem pokrewna matematyce, powstaje problem przyswojenia jej przez umysły o innych niż matematyczny talentach. *Wprowadzenie* Tarskiego dobrze się do tego nadaje, łącząc przystępność wykładu z inspirującymi odniesieniami do języka codziennego, metod myślenia i dziejów myśli.

Alfred Tarski (1901-1983) należy do architektów współczesnej logiki, będąc wymieniany obok Arystotelesa, Gottloba Fregego (otwierającego nowoczesną logikę pracą z r. 1879) i Kurta Gödla (autora przełomowych wyników na temat ograniczeń formalizacji dowodzenia).

Oryginał amerykański nie był adresowany do tak szerokiego audytorium jak to, które ma logika w Polsce. Stąd potrzeba uzupełnienia polskiego przekładu tym, co jest z reguły obecne w naszych elementarnych kursach logiki. Ma temu służyć obecne Posłowie, wiążąc pojęcie wynikania logicznego z przystępną techniką dowodów założeniowych w logice predykatów.[1]

1. Praktyczne przykłady praw logiki predykatów

Co to jest logika predykatów, zostało wyjaśnione w §20. Jej język jest tak podstawowy, że omówiono go już w pierwszym rozdziale pt. "O użyciu zmiennych". W prawach logiki predykatów występują zmienne mogące reprezentować nazwy przedmiotów z dowolnej dziedziny. Stosunki ujmowane w tych prawach dadzą się wyrazić także w języku codziennym (por. §4, s. 10), ale ponieważ jest on niepomiernie bardziej skomplikowany niż język logiki, owe relacje są trudniejsze do zauważenia; trudniej więc też w nim o poprawność wysłowienia i argumentacji. Niech następujące prawa logiki predykatów ukażą powiązania między ich teorią logiczną a praktyką języka codziennego.

T1. $\forall_x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$, T2. $\varphi(y) \rightarrow \exists x \varphi(x)$.

Grecka litera φ zastępuje dowolne wyrażenie, które zawiera zmienną „x", reprezentującą nazwę jakiegoś przedmiotu z rozważanej dziedziny. T1 powiada, że gdy φ jest prawdą o każdym przedmiocie to jest też prawdą o dowolnym konkretnym przedmiocie y; a to dlatego, że zmienna wolna w następniku dopuszcza podstawienie nazwy dowolnego przedmiotu z danej dziedziny (por. §4). Prawo to oddaje pewien sposób dowodzenia zdań o przedmiotach jednostkowych; wolno takie zdanie uznać, gdy uznaje się odpowiednie zdanie dotyczące ogółu przedmiotów z danej dziedziny. Toteż udowodniwszy sąd ogólny, uzyskujemy informacje o licznych przedmiotach jednostkowych. Np. gdy się wie, że zawsze przyczyną grypy są wirusy, to wiadomo o każdym zagrypionym, co jest przyczyną jego choroby. Prawo T2 powiada, że jeśli coś jest prawdą o jakimś konkretnym przedmiocie, to wiemy ogólnie, że są rzeczy, o których to jest prawdą. Jest to pewien sposób udowodnienia, że istnieje określony rodzaj przedmiotów; np. by udowodnić, że istnieje yeti, wystarczy wskazać na jednego osobnika tego rodzaju.

Następne przykłady są sformułowane dla tych przypadków, w których wyrażenie φ jest predykatem o określonej liczbie członów: jednoczłonowym, tj.

[1] Zastąpiono nim *Posłowie* z 1go wydania (1995). W międzyczasie ukazał się w PWN pierwszy tom *Pism Logiczno-Filozoficznych* Alfreda Tarskiego, pod red. Jana Zygmunta, zawierający słynną pracę „O pojęciu wynikania logicznego" z r. 1936. Pojęcie to nie pojawia się we *Wprowadzeniu*, ale że zajmuje kluczowe miejsce w nauczaniu logiki w Polsce, pożądane jest przypomnienie go w tym miejscu (odc. 2), gdy został już szerzej udostępniony podstawowy w tej materii tekst Tarskiego.

przypisującym przedmiotowi pewną cechę, lub dwuczłonowym, tj. opisującym dwuczłonową relację (T11-T13).

T3. $\forall_x Px \leftrightarrow \sim \exists_x {\sim} Px$, T4. $\exists_x Px \leftrightarrow {\sim}\forall_x \sim Px$.

Prawa te określają stosunki między kwantyfikatorem ogólnym i egzystencjalnym, podobnie do ich odpowiedników z języka codziennego, jak „każdy” i „istnieje”. Kto więc uważa, iż *każdy jest przekupny*, uważa tym samym, że *nie istnieją tacy, co nie są przekupni.* Tyle T3. A powiedzenie *istnieją sprawiedliwi* mówi to samo, co *nie każdy jest niesprawiedliwy.* Choć te związki są oczywiste, zdarza się ludziom mylne rozmieszczanie negacji. Nie zawadzi więc poćwiczyć T3 i T4, a także zdania powstające z nich przez zanegowanie obu stron równoważności; te drugie, od nazwiska logika, który się nimi zajmował, nazwano prawami de Morgana (mają one odpowiedniki w innych teoriach logicznych – zob. Indeks).

T5. $\forall_x(Px \land Qx) \leftrightarrow (\forall_x Px \land \forall_x Qx)$

T6. $\exists_x(Px \land Qx) \rightarrow (\exists_x Px \land \exists_x Qx)$

T7. $\exists_x(Px \lor Qx) \leftrightarrow (\exists_x Px \lor \exists Qx)$

T8. $(\forall_x Px \lor \forall_x Qx) \rightarrow \forall_x(Px \lor Qx)$

T9: $\forall_x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall_x Px \rightarrow \forall_x Qx)$

T10. $\forall_x(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow {\sim}\exists_x(Px\land \sim Qx)$

T11. $\forall_x\forall_y Rxy \leftrightarrow \forall_y\forall_x Rxy$

T12. $\exists_x\exists_y Rxy \leftrightarrow \exists_y\exists_x Rxy$

T13. $\exists_x\forall_y Rxy \rightarrow \forall_y\exists_x Rxy$.

Prawa T5-T9 dotyczą rozdzielania kwantyfikatorów pomiędzy człony różnych funkcji prawdziwościowych lub też wyprowadzania ich przed całość danej funkcji. Można zauważyć podobieństwo tych związków do związków między spójnikami i kwantyfikatorami języka polskiego. Np. T5 oddaje równoważność między zdaniami *każdy jest młody i bogaty* oraz *każdy jest młody i każdy jest bogaty.*

Co się tyczy T6, zależność zachodzi tylko w jedną stronę. Implikacja odwrotna, mianowicie: $(\exists_x Px \land \exists_x Qx) \rightarrow \exists_x(Px \land Qx)$ nie jest prawem logiki. Można to wykazać przez dobór odpowiedniego KONTRPRZYKłADU względem implikacji, tj. wskazanie takiego stanu rzeczy, w którym poprzednik będzie prawdziwy, a następnik fałszywy. Niech rozważaną dziedziną będzie zbiór liczb całkowitych, a więc zmienną „x” odczytamy zwrotem „liczba całkowita”. Dalej, odczytajmy „P” jako predykat „jest liczbą parzystą”, a „Q” — „jest liczbą nieparzystą”. Wtedy poprzednik jest prawdziwy, bo istnieją liczby parzyste oraz istnieją nieparzyste, zaś następnik fałszywy, bo nie jest prawdą, że istnieje liczba zarazem parzysta i nieparzysta.

T7 określa relację między alternatywą i kwantyfikatorem egzystencjalnym, który można rozdzielić między człony alternatywy (implikacja od lewej do prawej), a można też wyłączyć przed alternatywę (implikacja odwrotna). Stosunek między alternatywą i kwantyfikatorem ogólnym jest opisany w T8. Implikacja odwrotna do T8 nie zachodzi, co można znów wykazać kontrprzykładem. Ma on obalić formułę:

$\forall_x(Px \lor Qx) \to (\forall_x Px \lor \forall_x Qx)$. Niech rozważaną dziedziną będzie zbiór ciał niebieskich, jednym z predykatów „jest gwiazdą”, a drugim „jest nie-gwiazdą” (tj. planetą, kometą etc.). W tej dziedzinie poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy (każde ciało jest gwiazdą lub nie-gwiazdą), następnik zaś fałszywy, bo nie jest prawdą żaden człon alternatywy: ani ten, że każdy obiekt jest gwiazdą, ani ten, że każdy jest nie-gwiazdą.

Ostatnie trzy prawa dotyczą przestawiania kwantyfikatorów. O trzecim z nich trzeba zauważyć, że nie zachodzi implikacja doń odwrotna: $\forall_y \exists_x Rxy \to \exists_x \forall_y Rxy$. Można ją obalić choćby takim kontrprzykładem: w pewnej grupie każdy kogoś się boi, ale nie istnieje ktoś, kogo boją się wszyscy.

Na pilną uwagę zasługuje T10, bo **wynika** zeń ważne praktycznie prawo:

T10*. $\exists_x(Px \land \sim Qx) \to \sim\forall_x(Px \to Qx)$.

Uczy ono, jak za pomocą kontrprzykładu można obalić ogólne zdanie warunkowe: trzeba wskazać na (bodaj jeden) przedmiot, który spełnia poprzednik, a nie spełnia następnika. Zważywszy, jak powszechnym i szkodliwym błędem są pochopne uogólnienia, docenimy doniosłość tego prawa dla dobrego prowadzenia się umysłu.

2. Wynikanie logiczne i dowodzenie twierdzeń

Użyto wyżej słowa „wynika”. Ma ono w logice kilka znaczeń, których precyzyjne rozróżnienie jest zasługą Tarskiego. Podał on definicję wynikania logicznego, zwanego też semantycznym, odróżniając je od wynikania implikacyjnego (*Wprowadzenie* §9) oraz wynikania inferencyjnego, zwanego też WYPROWADZANIEM, które zachodzi między jakimś zdaniem a tymi zdaniami, z których ono powstało w rezultacie przekształceń dopuszczanych przez REGUŁY DOWODZENIA (§15), zwane też regułami wnioskowania lub inferencyjnymi. Gdy zdanie jest w ten sposób wyprowadzone z jednego lub więcej zdań prawdziwych, zwanych wówczas jego PRZESŁANKAMI, ma dzięki temu zagwarantowaną prawdziwość; mówimy wtedy, że zostało DOWIEDZIONE na podstawie owych zdań i staje się przez to TWIERDZENIEM tej teorii, do której należą przesłanki.

Zdanie T10* wynika z T10 na wszystkie trzy sposoby, ale z tego przykładu nie należy wnosić, że takie pokrywanie się zachodzi w każdym przypadku. Ów fakt, że wynikaniu logicznemu nie zawsze towarzyszy inferencyjne jest doniosłym odkryciem co do natury logiki.

Wyprowadzenia T10* z T10 można dokonać za pomocą następujących reguł wnioskowania: (1) od $\varphi \leftrightarrow \psi$ do $\varphi \to \psi$; (2) od $\varphi \to \psi$ do $\sim \psi \to \sim \varphi$; (3) od φ do $\sim\sim \varphi$; (4) od $(\varphi \to \psi)$ i $(\psi \to \chi)$ do $(\varphi \to \chi)$. We *Wprowadzeniu* stosuje się jedynie reguły odrywania i podstawiania (zob. s. 156 nn). Z tych dwóch oraz odpowiednich praw logiki można wyprowadzić (1) - (4); takie reguły wtórne znakomicie upraszczają dowody.

Wyprowadzenie T10* z T10 świadczy o tym, że pierwsze wynika inferencyjnie z drugiego. Aby stwierdzić wynikanie logiczne, trzeba się odwołać do definicji tego pojęcia (co do użytego tam terminu „model”, zob. *Wprowadzenie* §37). Oto jej treść. *Zdanie Z wynika logicznie ze zdań klasy K, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model klasy K jest zarazem modelem zdania Z.* (dz. cyt. w przyp. 1, str.

198). W obecnym przykładzie klasa K zawiera tylko zdanie T10; jako prawo logiki jest ono prawdziwe w każdym modelu. Tak samo zdanie T10* jest prawdziwe w każdym modelu, a więc każdy model T10 jest modelem T10*, co znaczy, że drugie wynika logicznie z pierwszego.

Inna metoda znajdowania praw logiki predykatów opiera się na pojęciu wyprowadzania (wynikania inferencyjnego). Jest to metoda aksjomatyczna, o której obszernie i po mistrzowsku traktuje *Wprowadzenie* (rozdz. VI).[2] Polega ona na tym, że pewne zdania przyjmuje się bez dowodu, a pozostałych dowodzi się wyprowadzając je z tych aksjomatów za pomocą reguł wnioskowania. Jest np. system, w którym aksjomatami są T1 i T2, a w dowodach stosuje się regułę odrywania i następujące reguły, opatrzone zastrzeżeniem, że formuła oznaczona dalej jako ψ nie zawiera x jako zmiennej wolnej.[3]

R1. Z $\psi \to \phi(x)$ wnioskujemy $\psi \to \forall_x \phi(x)$;

R2. Z $\phi(x) \to \psi$ wnioskujemy $\exists_x \phi(x) \to \psi$.

Pojęcia aksjomatu, reguły, systemu itp. są nie mniej ważne dla humanistów niż dla matematyków. Takie studium myślenia dedukcyjnego rzuca snop światła na funkcjonowanie inteligencji ludzkiej, a przez to samo toruje drogę do ważnej problematyki sztucznej inteligencji.

3. Jak zbadać, czy formuła jest prawem logiki predykatów

Gdy z założenia A wynika inferencyjnie zdanie B, stanowi to dowód zdania $A \to B$. Innym sposobem udowodnienia implikacji jest wykazanie, iż z jej zaprzeczenia, co równa się przyjęciu założeń A, $\sim B$, wynika inferencyjnie para zdań sprzecznych. Tymi sposobami można dowodzić praw logiki predykatów, nie troszcząc się o znalezienie aksjomatów i unikając długich łańcuchów dowodowych.

Gdy w drugim ze sposobów korzystamy z takich reguł wnioskowania, które prowadzą do formuł coraz to mniej złożonych, aż po najprostsze (tj. takie, że się już dalej nie rozkładają), to uzyskujemy metodę nie tylko dowodzenia lecz i obalania. Mianowicie, w zbiorze wszystkich zdań najprostszych wywiedzionych z *założenia o fałszywości zdania* R(ozważanego), albo jest sprzeczność (tj. zdania między sobą sprzeczne w każdym rozgałęzieniu dowodu), albo jej nie ma. Gdy jest, to znaczy że założenie o fałszywości R jest fałszywe, co stanowi dowód prawdziwości R. Gdy jej nie ma (i nie będzie, bo dowód się zamyka, gdy nie ma już zdań złożonych), to znaczy, że założenie o fałszywości R jest dla pewnych podstawień spełnione, a więc R nie jest prawem logiki. Oto reguły wnioskowania mówiące o tym, jak przez kolejne eliminacje stałych logicznych dochodzić do formuł najprostszych; duże litery

[2] Ukazuje się ją tam na przykładach teorii matematycznych, ale w kursach elementarnych pożyteczne są przykłady z samej logiki. Krok w tym kierunku uczynił redaktor czwartego wydania amerykańskiego, uzupełniając Ćwiczenia do rozdz. VI zadaniami na wyprowadzanie twierdzeń logiki zdań z podanych aksjomatów.

[3] Motywację tego zastrzeżenia, przykłady dowodów oraz wyprowadzenie reguły generalizacji (jako wtórnej) można znaleźć w *Małej encyklopedii logiki* (Ossolineum 1988), artykuł pt. „Rachunek kwantyfikatorów”, odc. 3).

są w nich nazwami formuł; symbol „|” poleca prowadzić dowód w dwóch gałęziach (na każdej będziemy śledzić, czy pojawi się sprzeczność, czy jej zabraknie).

$[\sim\sim]$	$\frac{\sim\sim A}{A}$		
$[\wedge]$	$\frac{A\wedge B}{A,\ B}$	$[\sim\ \wedge]$	$\frac{\sim(A\wedge B)}{\sim A\mid\sim B}$
$[\vee]$	$\frac{A\vee B}{A\mid B}$	$[\sim\vee]$	$\frac{\sim(A\vee B)}{\sim A,\ \sim B}$
$[\rightarrow]$	$\frac{A\rightarrow B}{\sim A\mid B}$	$[\sim\rightarrow]$	$\frac{\sim(A\rightarrow B)}{A,\ \sim B}$
$[\exists]$	$\frac{\exists_x A(x)}{A(c)}$	$[\sim\exists]$	$\frac{\sim\exists_x A(x)}{\sim A(c)}$
$[\forall]$	$\frac{\forall_x A(x)}{A(c)}$	$[\sim\forall]$	$\frac{\sim\forall_x A(x)}{\sim A(c)}$

Regułom $(\exists)$ i $(\sim\forall)$ towarzyszy następujące zastrzeżenie. Można je stosować tylko wtedy, gdy stała „c” (która, po opuszczeniu kwantyfikatora, zastępuje zmienną „x” na każdym miejscu w A) nie pojawiła się w dowodzie wcześniej w formule różnej od A; gdy zaś „c” pojawia się wcześniej, to należy użyć jako stałej innej litery, nie użytej dotąd w dowodzie. Oto powód zastrzeżenia. Przypuśćmy, że w dowodzie zostało już wykazane istnienie przedmiotu spełniającego A, tzn. $\exists_x A(x)$. Można wtedy wprowadzić przedmiot oznaczony literą „c” jako spełniający A. Gdy się dalej okaże, iż istnieje przedmiot spełniający B, to nie wolno nazywać go znów „c”, bo to by przesądzało, że spełnia on oba warunki, A i B, co nie zostało udowodnione; używając zaś innej litery, niczego takiego nie przesądzamy. Analogicznie uzasadnia się zastrzeżenie przy regule $\sim\forall$, która też dotyczy zdań egzystencjalnych (to, że nie każda rzecz spełnia A znaczy, że są rzeczy nie spełniające A).

Dowód prawa T9. Jego negacja $\sim(\forall_x(Px\rightarrow Bx)\rightarrow(\forall_x Px\rightarrow\forall_x Bx))$ wedle $(\sim\rightarrow)$ prowadzi do zdań 1 i 2 stanowiących założenia naszego dowodu.

1	$\forall_x(Px\rightarrow Qx)$;	
2	$\sim(\forall_x Px\rightarrow\forall_x Qx)$;	
3	$\forall_x Px$	2;
4	$\sim\forall_x Qx$	2;
5	Pa	3;
6	$\sim Qa$	4;
7	$Pa\rightarrow Qa$	1;
8	$\sim Pa \mid Qa$	7.

Kreską oznaczamy fakt pojawienia się sprzeczności (pojawia się tu ona w obu gałęziach). A oto dowód prawa 13: $\exists_x\forall_y Rxy\rightarrow\forall_y\exists_x Rxy$, gdzie „$Rxy$” może być np. zwrotem „$x$ jest liczbą naturalną większą od y”.

1	$\exists_x\forall_y Rxy$;	
2	$\sim\forall_y\exists_x Rxy$;	
3	$\forall_y Ray$	1;
4	$\sim\exists_x Rxb$	2;
5	Rab	3;
6	$\sim Rab$	4.

Z zaprzeczenia implikacji odwrotnej Od13: $\forall_y \exists_x Rxy \rightarrow \exists_x \forall_y Rxy$, nie udaje się uzyskać sprzeczności pomimo zrobienia wszystkiego, co trzeba, by ją uzyskać (gdyby zachodziła), nie jest więc ta implikacja prawem logiki.

1	$\forall_y \exists_x Rxy$;	
2	$\sim \exists_x \forall_y Rxy$;	
3	$\exists_x Rxa$	1;
4	Rba	3;
5	$\sim \forall_y Rby$	2;
6	$\sim Rbc$	5.

By uzyskać sprzeczność, trzeba by „y” w 5 zastąpić przez „a”, ale wobec wystąpienia „a” w 4 byłoby to wbrew zastrzeżeniu w regule ($\sim \forall$). Zatem założenie (wiersze 1 i 2), iż jakiś model spełniający poprzednik w Od13 nie spełnia następnika, nie rodzi sprzeczności. Nie każdy więc model poprzednika jest modelem następnika, co znaczy, że następnik *nie wynika logicznie* z poprzednika. A zatem Od13 *nie jest prawem logiki*; nie wolno więc rozumować wedle tego schematu.

Tak zasługuje się logika jako organ kontrolny naszej intuicyjnej zdolności rozumowania.

Witold Marciszewski